



# **Theoretische Physik II**

## **Elektrodynamik**

**Peter E. Blöchl**

**keine Panik!**

© Peter Blöchl, 2000-October 1, 2025

Source: <https://phisx.org/>

Permission to make digital or hard copies of this work or portions thereof for personal or classroom use is granted provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation. To copy otherwise requires prior specific permission by the author.

1

---

<sup>1</sup>zum Titelblatt: Wofür steht  $\Phi SX$ ? Erstens hört sich  $\Phi$ -S-X wie "Physics" an und zweitens stehen die Symbole für die drei Grundpfeiler der Theoretischen Physik:  $X$  ist das Symbol für eine Teilchenkoordinate und steht für die Klassische Mechanik,  $\Phi$  ist das Symbol für eine Wellenfunktion und steht für die Quantenmechanik und  $S$  ist das Symbol für Entropie und steht für die Statistische Physik

## **Vorwort**

Diese Mitschrift entspricht einer Vorlesung von 56 akademischen Stunden oder 14 Wochen mit 4 Semesterwochenstunden. Die Vorlesung war begleitet von Hausaufgaben, die in 2 Semesterwochenstunden besprochen wurden. Die Vorlesung richtet sich an Studenten im vierten Semester.

Fehler lassen sich nicht ganz vermeiden. Im gegenwärtigen Stadium der Mitschrift ist noch besondere Vorsicht geboten. Es sollten daher weitere Bücher zur Hand genommen werden. Für Hinweise sind wir sehr dankbar.

In dieser Mitschrift wurde besonderes Augenmerk auf ausführliche Ableitungen gelegt. Ein Anfänger sollte mit Hilfe dieser Mitschrift und einem Blatt Papier und Bleistift sämtliche Ableitungen nachvollziehen können. Ein Fortgeschrittener, sollte die meisten Schritte anhand der Mitschrift nachvollziehen können. Falls sich dennoch logische Sprünge eingeschlichen haben sollten, bitte ich um einen Hinweis.

Ich habe zu jedem Kapitel die Anzahl der entsprechenden Vorlesungsstunden angegeben. Die entsprechenden Mathematischen Methoden sollten an der richtigen Stelle eingefügt werden. Diese findet man im mathematischen Anhang dieses und des vorangehenden Bandes. Hinweise werden (noch lückenhaft) im Text gegeben.

Ich möchte mich bei den Studenten bedanken, welche die Vorlesung im SS 2003 gehört haben. Mit ihren Hinweisen während und nach der Vorlesung haben sie einen wesentlichen Beitrag geleistet.

Peter Blöchl



# Contents

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung (1h)</b>   | <b>11</b> |
| 1.1      | Bedeutung der Elektrodynamik . . . . .                                 | 11        |
| 1.2      | Aufbau einer Physikalischen Theorie . . . . .                          | 12        |
| 1.3      | Die Rolle der Mathematik in der Physik . . . . .                       | 13        |
| 1.4      | Literatur . . . . .  | 13        |
| <b>2</b> | <b>Ladungen, Ströme und deren Dichten (2h)</b>                         | <b>15</b> |
| 2.1      | Ladungen und Ladungsdichten . . . . .                                  | 15        |
| 2.2      | Strom und Stromdichten . . . . .                                       | 17        |
| 2.3      | Ladungserhaltung . . . . .   | 21        |
| <b>3</b> | <b>Maxwellgleichungen und Lorentzkraft (4h)</b>                        | <b>25</b> |
| 3.1      | Die Grundgleichungen der Elektrodynamik . . . . .                      | 25        |
| 3.2      | Lorentz Kraft . . . . .  | 26        |
| 3.2.1    | Bewegung im homogenen elektrischen Feld . . . . .                      | 26        |
| 3.2.2    | Bewegung im homogenen magnetischen Feld . . . . .                      | 27        |
| 3.3      | Darstellung von Vektorfeldern . . . . .                                | 30        |
| 3.4      | Maxwellgleichungen und ihre Interpretation . . . . .                   | 31        |
| 3.4.1    | Gaußsches Gesetz . . . . .   | 31        |
| 3.4.2    | Keine magnetischen Monopole . . . . .                                  | 32        |
| 3.4.3    | Faradaysches Induktionsgesetz . . . . .                                | 33        |
| 3.4.4    | Amperesches Gesetz und Maxwellscher Verschiebungsstrom . . . . .       | 34        |
| 3.5      | Notationen . . . . .   | 36        |
| 3.5.1    | Gauß und SI systeme . . . . .  | 36        |
| 3.5.2    | Aufteilung der Elektrodynamik . . . . .                                | 37        |
| 3.6      | Übungen . . . . .  | 38        |
| 3.6.1    | Elektrisches Feld eines homogen geladenen Drahtes . . . . .            | 38        |
| 3.6.2    | Elektronenkanone . . . . .   | 38        |
| 3.6.3    | Hall Effekt . . . . .  | 38        |
| 3.6.4    | Massenspektrometer . . . . .   | 38        |
| 3.6.5    | Lichtmaschine . . . . .  | 38        |
| 3.6.6    | Teilchen im homogenen Magnetfeld . . . . .                             | 38        |
| <b>4</b> | <b>Vom Experiment zu den Maxwellgleichungen der Elektrostatik (4h)</b> | <b>39</b> |
| 4.1      | Coulombgesetz . . . . .  | 39        |
| 4.2      | Elektrisches Feld . . . . .  | 40        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.3      | Das elektrostatische Potential . . . . .                                   | 41        |
| 4.4      | Poissonsgleichung . . . . .  | 43        |
| 4.5      | Maxwellgleichungen der Elektrostatik . . . . .                             | 44        |
| <b>5</b> | <b>Potentialtheorie am Beispiel der Elektrostatik (11h)</b>                | <b>45</b> |
| 5.1      | Energie einer Ladungsverteilung . . . . .                                  | 45        |
| 5.1.1    | Adiabatische Verschiebung . . . . .  | 45        |
| 5.1.2    | Selbstenergie von Punktladungen . . . . .                                  | 46        |
| 5.1.3    | Selbstenergie einer Ladungsdichte . . . . .                                | 48        |
| 5.1.4    | Energie des Potentials oder des elektrischen Feldes . . . . .              | 49        |
| 5.2      | Randbedingungen . . . . .  | 50        |
| 5.3      | Quasi eindimensionale Probleme . . . . .                                   | 52        |
| 5.3.1    | Beispiel Plattenkondensator . . . . .                                      | 53        |
| 5.4      | Methode der Bildladungen . . . . .   | 54        |
| 5.5      | Fouriertransformation . . . . .  | 57        |
| 5.6      | Methode der Greenschen Funktionen . . . . .                                | 58        |
| 5.6.1    | Beispiel Poissonsgleichung . . . . .                                       | 58        |
| 5.6.2    | Beliebige lineare inhomogene Differentialgleichungen . . . . .             | 59        |
| 5.6.3    | Analogie mit linearen Gleichungssystemen von Vektoren . . . . .            | 59        |
| 5.7      | Multipolentwicklung . . . . .  | 59        |
| 5.8      | Kugelflächenfunktionen . . . . .   | 65        |
| 5.8.1    | Eigenschaften der Kugelflächenfunktion . . . . .                           | 66        |
| 5.8.2    | Poissonsgleichung in Kugelflächenfunktionen . . . . .                      | 68        |
| 5.8.3    | Greensfunktion der Radialgleichung . . . . .                               | 70        |
| 5.9      | Aufgaben . . . . .   | 75        |
| 5.9.1    | Feld einer polarisierten Hohlkugel . . . . .                               | 75        |
| 5.9.2    | Elektrische Feldgradienten . . . . .                                       | 75        |
| 5.9.3    | Van der Waals Wechselwirkung . . . . .                                     | 75        |
| <b>6</b> | <b>Magnetostatik (4h)</b>  | <b>77</b> |
| 6.1      | Vektorpotential . . . . .  | 77        |
| 6.1.1    | Das Vektorpotential . . . . .  | 77        |
| 6.1.2    | Vektorpotential einer Stromdichteverteilung . . . . .                      | 78        |
| 6.2      | Gesetz von Biot und Savart . . . . .                                       | 79        |
| 6.2.1    | Beispiel: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes . . . . .           | 79        |
| 6.3      | Multipolentwicklung des Vektorpotentials . . . . .                         | 81        |
| 6.4      | Magnetisches Moment . . . . .  | 84        |
| 6.4.1    | Beispiel: Magnetisches Moment einer kreisförmigen Leiterschleife . . . . . | 84        |
| 6.4.2    | Magnetfeld und Drehimpuls . . . . .  | 85        |
| 6.5      | Magnetisierung . . . . .   | 87        |
| 6.5.1    | Energie eines magnetischen Moment im Magnetfeld . . . . .                  | 89        |
| 6.5.2    | Exkurs: Zeeman Effekt . . . . .  | 91        |
| 6.6      | Das skalare magnetische Potential . . . . .                                | 92        |
| 6.6.1    | Exkurs: Magnetische Resonanz . . . . .                                     | 95        |
| 6.7      | Exkurs: Mikromagnetisches Modell . . . . .                                 | 98        |
| 6.8      | Übungen . . . . .  | 99        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 6.8.1     | Das Streufeld eines Magneten . . . . .                                   | 99         |
| 6.8.2     | Wechselwirkung zweier magnetischen Momente . . . . .                     | 99         |
| 6.8.3     | Magnetisches Moment einer Leiterschleife . . . . .                       | 99         |
| 6.8.4     | Punktdipol . . . . .   | 99         |
| <b>7</b>  | <b>Elektrodynamik in der Materie (4h)</b>                                | <b>101</b> |
| 7.1       | Polarisation . . . . .   | 101        |
| 7.1.1     | Rolle von Polarisation und Magnetisierung . . . . .                      | 102        |
| 7.1.2     | Differentialgleichungen für Polarisation und Magnetisierung . . . . .    | 103        |
| 7.2       | Maxwellgleichungen in der Materie . . . . .                              | 105        |
| 7.3       | Zustandsgleichungen . . . . .  | 107        |
| 7.3.1     | Modell für einen Paramagneten . . . . .                                  | 109        |
| 7.3.2     | Modell für einen Ferromagneten . . . . .                                 | 111        |
| 7.4       | Potentiale in der Materie . . . . .                                      | 113        |
| 7.5       | Randbedingungen an Grenzflächen . . . . .                                | 114        |
| 7.6       | Exkurs: Ein klassischer Fall wie es nicht geht. . . . .                  | 117        |
| <b>8</b>  | <b>Freie Felder (2h)</b>   | <b>119</b> |
| 8.1       | Wellenpakete, Gruppen und Phasengeschwindigkeit . . . . .                | 120        |
| 8.2       | Licht . . . . .  | 121        |
| 8.2.1     | Stärke des magnetischen Feldes im Lichtstrahl . . . . .                  | 124        |
| 8.2.2     | Brechungsgesetz (Selbststudium) . . . . .                                | 124        |
| 8.2.3     | Selbststudium: Lichtgeschwindigkeit in anisotropen Materialien . . . . . | 126        |
| 8.3       | Dipolstrahlung . . . . .   | 128        |
| 8.4       | Übungen . . . . .  | 128        |
| 8.4.1     | Tintenfisch auf der Jagd . . . . .                                       | 128        |
| <b>9</b>  | <b>Eichpotentiale (2h)</b>   | <b>129</b> |
| 9.1       | Elektrisches Potential und Vektorpotential . . . . .                     | 129        |
| 9.2       | Bewegungsgleichungen der Eichpotentiale . . . . .                        | 130        |
| 9.3       | Eindeutigkeit der Eichpotentiale . . . . .                               | 131        |
| 9.3.1     | Coulomb-Eichung . . . . .  | 132        |
| 9.3.2     | Lorentzeichung . . . . .   | 133        |
| <b>10</b> | <b>Relativistische Formulierung der Elektrodynamik (4h)</b>              | <b>135</b> |
| 10.1      | Kovariante Vektornotation . . . . .                                      | 135        |
| 10.1.1    | Schiefwinklige Koordinatensysteme . . . . .                              | 135        |
| 10.1.2    | Einsteinsche Summenkonvention . . . . .                                  | 139        |
| 10.1.3    | Rechenregeln für die kovariante Schreibweise . . . . .                   | 139        |
| 10.1.4    | Zusammenhang mit anderen Vektornotationen . . . . .                      | 140        |
| 10.2      | Symmetrie der Bewegungsgleichungen für die Eichpotentiale . . . . .      | 140        |
| 10.3      | Lorentz-Transformationen . . . . .                                       | 143        |
| 10.4      | Aufgaben . . . . .   | 145        |
| <b>11</b> | <b>Wirkungsprinzip (4h)</b>  | <b>147</b> |
| 11.1      | Lagrange-Funktion und Lagrange-Dichte . . . . .                          | 149        |
| 11.2      | Lagrange-Funktion und Lagrange-Dichte der Elektrodynamik . . . . .       | 150        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 11.3      | Das Wirkungsprinzip . . . . .  | 152        |
| 11.4      | Euler-Lagrange Gleichungen der Elektrodynamik . . . . .  | 155        |
| 11.4.1    | Lorentz Kraft . . . . .  | 156        |
| 11.4.2    | Maxwellgleichungen . . . . .   | 158        |
| 11.5      | Aufgaben . . . . .   | 161        |
| 11.5.1    | Wirkungsprinzip der Schrödinger Gleichung . . . . .  | 161        |
| <b>12</b> | <b>Noethertheorem</b>  | <b>163</b> |
| 12.1      | Das Noethertheorem . . . . .   | 165        |
| 12.1.1    | Noethertheorem für Teilchen . . . . .  | 166        |
| 12.1.2    | Beispiel: rein mechanische Wirkung . . . . .   | 170        |
| 12.1.3    | Noethertheorem für Felder . . . . .  | 172        |
| 12.2      | Noethertheorem in der Elektrodynamik . . . . .   | 173        |
| 12.2.1    | Herstellen der Eichinvarianz . . . . .   | 175        |
| 12.2.2    | Erhaltungssätze . . . . .  | 179        |
| 12.3      | Herleitung des Noethertheorems (Heimstudium) . . . . .   | 181        |
| 12.4      | Beweisidee . . . . .   | 181        |
| 12.5      | Einleitung zum Beweis . . . . .  | 182        |
| 12.5.1    | $\varepsilon$ -Ableitung des Pfadanteils der Wirkung . . . . .   | 182        |
| 12.5.2    | $\varepsilon$ -Ableitung des Feldanteils der Wirkung . . . . .   | 185        |
| 12.5.3    | Beides zusammen. . . . .   | 189        |
| 12.6      | Ein weiterer Beweis für das Noethertheorem . . . . .   | 191        |
| 12.6.1    | Verallgemeinerung des Noethertheorems auf Pfade . . . . .  | 196        |
| 12.7      | Aufgaben . . . . .   | 196        |
| 12.7.1    | Sonnensegel . . . . .  | 196        |
| 12.7.2    | Nanoteilchen im Laserlicht . . . . .   | 196        |
| 12.7.3    | Energie-Impulstensor des Elastischen Feldes . . . . .  | 196        |
| <b>13</b> | <b>Ursprung der Maxwellgleichungen(4h)</b>   | <b>197</b> |
| 13.1      | Einführung . . . . .   | 197        |
| 13.2      | Wirkung des Klein-Gordon Felds . . . . .   | 197        |
| 13.3      | Dispersionsrelation des Klein-Gordon Felds . . . . .   | 198        |
| 13.4      | Globale Eichinvarianz und Ladungserhaltung . . . . .   | 199        |
| 13.5      | Schrödingergleichung als nichtrelativistischer Grenzfall . . . . .                                     | 200        |
| 13.6      | Herstellen der lokalen Eichinvarianz . . . . .   | 203        |
| 13.7      | Freie Felder . . . . .   | 205        |
| 13.8      | Herleitung der Maxwellgleichungen . . . . .  | 206        |
| 13.9      | Herleitung der Lorentzkraft . . . . .  | 207        |
| <b>14</b> | <b>Epilog</b>  | <b>211</b> |
| <b>A</b>  | <b>Klassisches Teilchen im Elektromagnetischen Feld</b>  | <b>213</b> |
| A.1       | Wirkungsprinzip für Teilchen im Elektromagnetischen Feld . . . . .                                     | 213        |
| A.2       | Nichtrelativistischen Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im elektrodynamischen Feld . . . . . | 214        |
| A.3       | Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Gleichungen . . . . .  | 216        |
| A.4       | Noethertheorem für klassische Felder . . . . .   | 218        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| A.5      | Coulombeichung . . . . .  | 220        |
| A.5.1    | Stationärer Fall . . . . .  | 221        |
| A.5.2    | Freie Felder . . . . .  | 221        |
| A.6      | Lorentzzeichnung . . . . .  | 222        |
| <b>A</b> | <b>Einheiten</b>  | <b>225</b> |
| A.1      | Rechnen mit Einheiten . . . . .   | 225        |
| A.2      | SI einheiten . . . . .  | 225        |
| A.3      | Einheiten mechanischer Größen . . . . .   | 226        |
| A.4      | Einheiten elektromagnetischer Größen . . . . .  | 227        |
| A.5      | Fundamentale Konstanten . . . . .   | 227        |
| <b>B</b> | <b>Vektorrechnung</b>   | <b>229</b> |
| <b>C</b> | <b>Nützliche Formeln für Vektoren</b>   | <b>231</b> |
| <b>D</b> | <b>Differentialgeometrie</b>  | <b>233</b> |
| D.1      | Linienintegrale . . . . .   | 233        |
| D.1.1    | Weglänge . . . . .  | 234        |
| D.1.2    | Ungerichtete Linienintegrale . . . . .  | 235        |
| D.1.3    | Gerichtete Linienintegrale . . . . .  | 235        |
| D.2      | Flächenintegrale . . . . .  | 236        |
| D.2.1    | Fläche . . . . .  | 236        |
| D.2.2    | Ungerichtetes Flächeintegral . . . . .  | 237        |
| D.2.3    | Gerichtetes Flächeintegral . . . . .  | 237        |
| D.2.4    | Gauß Theorem . . . . .  | 237        |
| D.3      | Stokesscher Satz . . . . .  | 239        |
| D.4      | Zerlegung eines Vektorfeldes in ein Divergenzfreies Feld und ein Rotationsfreies Feld | 241        |
| D.5      | Helmholtz Theorem . . . . .   | 241        |
| <b>E</b> | <b>Diracsche Deltafunktion</b>  | <b>243</b> |
| E.0.1    | Nützlicher Satz für $\delta$ -Funktionen . . . . .                                    | 243        |
| E.0.2    | Gradient der Stufenfunktion . . . . .   | 245        |
| <b>F</b> | <b>Laplace operator in polar coordinates</b>  | <b>247</b> |
| <b>G</b> | <b>Symbole</b>  | <b>249</b> |
| <b>H</b> | <b>Griechisches Alphabet</b>  | <b>251</b> |
| <b>I</b> | <b>Zum Author</b>   | <b>253</b> |
| <b>J</b> | <b>Zur Philosophie der <math>\Phi</math>SX Reihe</b>                                  | <b>255</b> |



# Chapter 1

## Einleitung (1h)

### 1.1 Bedeutung der Elektrodynamik

Warum beschäftigen wir uns mit der Elektrodynamik? Dazu gibt es eine ganze Reihe von Gründen.

- Die Elektrodynamik ist eine der fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur, und damit ein Beispiel für die Beschreibung der anderen fundamentalen Wechselwirkungen.

Betrachten wir die elementaren Wechselwirkungen.

- **Gravitation:** Die Gravitationskraft wirkt zwischen zwei Massen. Sie bestimmt weitgehend unsere makroskopische Welt. Sie ist dafür verantwortlich, dass sich die Erde um die Sonne dreht, dafür, dass die Erde zusammenhält und, dafür dass wir nicht, aufgrund der aus der Erdrotation resultierenden Zentrifugalkraft, ungewollt einen Raumflug antreten. Die Gravitationskraft kann nur anziehend wirken.
  - **Elektrodynamik:** Sie ist die stärkste Kraft für Phänomene zwischen  $10^{-14}$  –  $10^{-6}$  m. Die elektrische Kraft hält Atomkerne und Elektronen in den Atomen zusammen und ist damit für den Aufbau von Materialien verantwortlich. Die **magnetische Wechselwirkung** kennen wir vom Magneten bzw. der Kompassnadel. Die **elektrische Wechselwirkung** ist die stärkste langreichweitige Kraft. Dennoch ist sie in unserer makroskopischen Welt kaum wahrnehmbar. Das liegt daran, dass sie sowohl anziehend, wie auch abstoßend wirken kann. Wird die elektrische Kraft zu groß, können Ladungen die fehlende Balance positiver und negativer Ladungen in Form eines Blitzes ausgleichen. Deshalb sind die meisten makroskopischen Körper beinahe ladungsneutral, sodass zwischen Ihnen nur geringe elektromagnetische Kräfte wirken.
  - Die **starke Kraft** hält Protonen und Neutronen zusammen, die wiederum aus Quarks bestehen. Sie ist nur auf ganz kleinen Dimensionen, d.h. nur innerhalb des Atomkerns bemerkbar. Die starke Kraft ist wiederum eine Folge der **Farbkraft** zwischen den **Quarks**, aus welchen Protonen und Neutronen aufgebaut sind.
  - Die **schwache Kraft** ist mit einer Reichweite von nur  $10^{-18}$  m sehr kurzreichweitig. Die Reichweite entspricht nur etwa einem Tausendstel des Protonendurchmessers. Aufgrund der schwachen Kraft können ein Proton und ein Elektron ein Neutron bilden. Dies ist die Voraussetzung für die Erzeugung von Helium aus Wasserstoff, die Fusionsreaktion, welche die Sonne am Brennen hält. Die schwache Kraft ist auch für die Erzeugung als auch für den radioaktiven Zerfall von schweren Atomkernen verantwortlich.
- Anhand der elektrischen Wechselwirkung lernen wir mit Feldern umzugehen. Felder spielen auch in vielen anderen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle:
    - Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Statistische Mechanik),

- Wahrscheinlichkeitsamplituden (Quantenmechanik),
  - Verzerrungsfelder (Elastizitätstheorie),
  - Meteorologie (Druck, Temperatur, Feuchtigkeit, Windfelder etc.)
- Die elektrische Wechselwirkung ist die wichtigste Wechselwirkung in der Materialforschung. Materialeigenschaften resultieren aus der elektrostatischen Wechselwirkung von Elektronen und Atomkernen. Die elektrische Wechselwirkung ist die stärkste Wechselwirkung auf der atomaren Längenskala.
- Die Elektrodynamik ist die Grundlage der Elektronik und damit auch der modernen Informationstechnologie. In der Elektronik steuert man den Fluss von elektrischen Ladungen.
- Die Elektrodynamik ist die Grundlage der Optik. Licht sind freie elektrodynamische Wellen. Radiowellen, Wärmestrahlung und Röntgenstrahlung sind Varianten von Licht, die sich vom sichtbarem Licht nur in der Wellenlänge unterscheiden.
- Die Elektrodynamik ist unsere erste quantenmechanische Theorie. Die Quantenmechanik, wie sie durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben wird, ist eine klassische Feldtheorie und steht damit auf derselben Stufe wie die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik. Die "Teilchen", die von den Maxwellgleichungen beschrieben werden, sind die Photonen, also Lichtteilchen. Die Teilcheneigenschaft wird erst in der Quantenfeldtheorie sichtbar, eine quantenmechanische Erweiterung der klassischen Feldtheorien.
- Ein durchgängiges Ziel der Physik ist es, alle Wechselwirkungen zu vereinheitlichen, also durch eine einzige Formel zu beschreiben. Das historisch erste Beispiel der Vereinheitlichung von zwei fundamentalen Wechselwirkungen war die Elektrodynamik, bei der Elektrizität und Magnetismus innerhalb einer Theorie beschrieben werden.
- Die Elektrodynamik bildet das Vorbild für die Beschreibung von Elementarteilchen. Die Quantenelektrodynamik war die erste konsistente Theorie von Teilchen und Feldern.
- Die Elektrodynamik war der Ursprung der Einsteins Relativitätstheorie. Die Maxwellgleichungen, die empirisch gefunden wurden, widersprechen der nichtrelativistischen Vorstellung von Raum und Zeit. Ein Resultat ist, dass sich Licht in allen Bezugssystemen mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet. Einstein übertrug die resultierenden Eigenschaften von elektrodynamischen auf mechanische Systeme.

## 1.2 Aufbau einer Physikalischen Theorie

- **Observable:** Eine Observable ist eine messbare Größe. Nicht beobachtbare Hilfsgrößen der Theorie sind keine Observablen.
- **Zustand:** In einem Zustand haben alle beobachtbaren Größen einen festen Wert. Die Werte elektrischen und magnetischen Felder in jedem Ort bestimmen den Zustand des elektrodynamischen Feldes.
- **System:** Gesamtheit der erlaubten Zustände, z.B. das elektrodynamische Feld mit all seinen möglichen Zuständen.
- **Bewegungsgleichungen:** Bestimmen die zeitliche Entwicklung der Zustände, z.B. die Maxwellgleichungen.

Eine Theorie muss eine Vorschrift enthalten, um aus einem Zustand die Werte messbarer Größen zu extrahieren, bzw. einen Zustand aus einer Anzahl von Observablen zu konstruieren.

Eine Theorie muss die zeitliche Entwicklung des Zustandes in die Zukunft vorhersagen.

### 1.3 Die Rolle der Mathematik in der Physik

In der Physik wird die Mathematik als Sprache verwendet. Es ist eine Sprache die für bestimmte Aspekte extrem exakt ist, auf der anderen Seite bestimmte Tatsachen nicht fassen kann. Streng genommen sagt die Mathematik aus sich selbst heraus nichts aus, da sie nur mit Symbolen und nicht mit Inhalten umgeht. So kann uns die Mathematik nicht sagen, wann morgen die Sonne aufgeht. Diese Mathematik ist aber extrem nützlich, um bestimmte Dinge auszudrücken, und aus bekannten Tatsachen andere herzuleiten. Kennen wir die Bewegungsgleichungen der Planeten und deren Deutung, so liefert und das, zusammen mit der Mathematik, sehr wohl die Zeit des Sonnenaufgangs.

Der Übergang von der Realität zur Mathematik ist die Domain der Physik. Es werden Tatsachen in der Realität gesucht und diese in eine mathematische Sprache übersetzt. Wir nennen das eine Theorie. Zum Beispiel sind eine Reihe von Beobachtungen in den Maxwellgleichungen abgebildet. Viele dieser Beobachtungen haben sich als redundant herausgestellt, sodass wir mit etwa 5 Gleichungen auskommen, die als Postulate in einen mathematische Formalismus eingehen. Der Formalismus erlaubt es, neue Aussagen zu formulieren, die experimentell überprüft werden können. Dadurch können auch die Postulate experimentell überprüft werden. Wenn wir den Postulaten hinreichend trauen, können wir die daraus folgenden Aussagen nutzbringend, zum Beispiel zum Bau einer Maschine, einsetzen. Letzteres wäre die Rolle der Ingenieure.

Die Berufsbilder sind hier absichtlich als Karikatur überspitzt dargestellt worden. In der Praxis sind die Grenzen der Fachgebiete fließend und eher mit der Art der Problemstellungen und der Arbeitsweise verbunden.

Zurück zur Mathematik. Während in der Mathematik sehr viel Wert auf eine exakte Sprachweise gelegt wird, wäre dies für die alltäglichen Probleme der Physik zu umständlich. Will man etwas beliebig genau ausdrücken, so benötigt man dafür auch beliebig viel Zeit. Es hat sich in der Physik deshalb eine Art "Mathematische Umgangssprache" entwickelt. Dies ist ähnlich zur Ausbildung eines Fachjargons in der natürlichen Sprache. Um eine Aussage zu verstehen, muss man daher den Kontext der Aussage kennen. Als Beispiel wird im Allgemeinen der Vektorpfeil weggelassen, weil es sehr viel Zeit beanspruchen kann diese jedesmal zu zeichnen. Weiß man aber, welche Größe man mit  $r$  bezeichnet, zum Beispiel die Position eines Teilchens, dann weiß man auch, dass  $r$  in diesem Fall ein dreidimensionaler Vektor, d.h.  $r = \vec{r}$ , ist.

Jeder von Ihnen wird sich voraussichtlich einen persönlichen Dialekt bilden. Dieser wird ein Kompromiss aus eigenen Vorlieben sein, die mit der Art des eigenen Denkens zusammenhängt, und der Anlehnung an den allgemeinen Sprachgebrauch, damit man auch kommunizieren kann.

### 1.4 Literatur

Für die Elektrodynamik ist das Buch von Jackson[1] die "Bibel". Das Buch von Jackson ist sehr umfassend und ausführlich geschrieben. Ein großer Vorteil ist, dass in den neueren Auflagen zumindest im ersten Teil das international anerkannte SI Einheitensystem verwendet wird.

Als begleitendes Buch und für die Prüfungsvorbereitung kann ich das Buch von Wachter und Hoerber "Repetitorium Theoretische Physik" sehr empfehlen. Es deckt nicht nur die Elektrodynamik sondern den gesamten Stoff von der Klassischen Mechanik bis zur Statistischen Physik in einem kleinen Buch ab. Obwohl ich von der Stoffauswahl geringfügig abweiche, enthält es den gesamten Stoff der für eine Abschlussprüfung in Theoretischer Physik notwendig ist.

Weitere Lehrbücher sind der Nolting[2] und der Fliessbach[3].

Diese Auswahl ist bei weitem nicht umfassend.



## Chapter 2

# Ladungen, Ströme und deren Dichten (2h)

Die Elektrodynamik beschäftigt sich mit einer Eigenschaft von Teilchen, nämlich der Ladung. Diese Eigenschaft führt dazu, dass diese Teilchen Kräfte aufeinander ausüben. Die Elektrodynamik ist die Theorie dieser Wechselwirkung.

Bevor wir uns den Wechselwirkungen zuwenden, suchen wir zunächst eine Beschreibung der Ladungen und Ihrer Ströme.

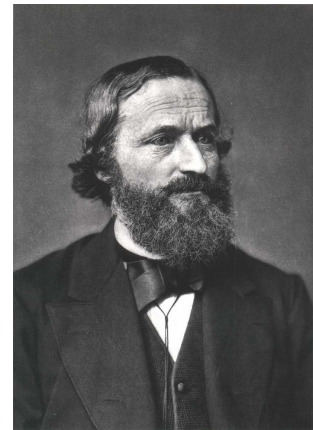


Abb. 2.1: Gustav R. Kirchhoff, 1824-1887

### 2.1 Ladungen und Ladungsdichten

Einem Teilchen können wir eine Ladung zuordnen. Die Ladung kann positive oder negative Werte annehmen. Die Einheit für die Ladung ist das **Coulomb**<sup>1</sup> mit dem Symbol C. Das Coulomb  $1\text{ C}=1\text{ As}$  ist von den Grundeinheiten des SI Einheitensystems, dem Ampere A und der Sekunde s abgeleitet. Das **Ampere** ist die Einheit der Stromstärke. Obwohl wir die Ladung durch eine beliebige reelle Zahl darstellen, nimmt sie in der Realität nur diskrete Werte an. Die Ladung ist also ein Vielfaches der **Elementarladung**  $e \approx 1.6 \times 10^{-19}\text{ As}$ . Die Ladung eines Elektrons ist dem Betrag nach gerade eine Einheitsladung  $q_e = -e$ .<sup>2</sup> Ein Coulomb entspricht also, abgesehen vom Vorzeichen, der Ladung von etwa  $10^{19}$  Elektronen.

Zunächst stellen wir den Zusammenhang zwischen Punktladungen und ihrer Ladungsdichte her. Dazu betrachten wir einen Schwarm von Punktteilchen mit den Ladungen  $q_n$  an den Positionen  $\vec{r}_n(t)$ . Die **Ladungsdichte** an einem Punkt  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$  ist dann durch den folgenden Ausdruck definiert.

<sup>1</sup>Editor: Hier etwas biographisches von Coulomb.

<sup>2</sup>Jedoch tragen die Quarks, die Bausteine der Protonen, auch Ladungen  $q = \pm \frac{1}{3}$  oder  $q = \pm \frac{2}{3}$ . Diese kommen allerdings nie frei vor, sondern nur derart kombiniert, dass die Gesamtladung einem Vielfachen der Elementarladung entspricht.

**Definition 2.1 LADUNGSDICHTE**

Die Ladungsdichte ist die Ladung pro Volumen

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{r_c \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_{r_c}|} \sum_{\vec{r}_n(t) \in \Omega_{r_c}} q_n \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\Omega_{r_c}$  eine am Ort  $\vec{r}$  zentrierte Kugel mit Radius  $r_c$  und dem Volumen  $|\Omega_{r_c}| = \frac{4\pi}{3} r_c^3$ . Die Summe erstreckt sich über alle Punktladungen mit Ladung  $q_n$  und Position  $\vec{r}_n(t)$ , die sich in der Kugel befinden.

Die Ladung in einem beliebigen Bereich  $\Omega$  ist das Integral der Ladungsdichte über diesen Bereich.

$$Q_\Omega(t) = \int_\Omega d^3r \rho(\vec{r}, t) \quad (2.2)$$

Der Ausdruck Gl. 2.1 bestimmt eine Folge von Kugeln mit  $\vec{r}$  im Zentrum und einem Radius  $r_c$ . Für jede dieser Kugeln wird die Gesamtladung  $Q_{\Omega_{r_c}}$  aller darin enthaltenen Teilchen bestimmt und durch das Volumen  $|\Omega_{r_c}|$  der Kugel dividiert. Ziehen wir die Kugel jetzt um den Punkt  $\vec{r}$  zusammen, dann wird aus dem Grenzwert die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}, t)$ . Die Ladungsdichte ist also die Ladung pro Volumen an einem gegebenen Punkt im Raum.

Die Ladungsdichte eines Schwarms von Punktteilchen lässt sich mit Hilfe der Deltafunktion in geschlossener Form darstellen

**LADUNGSDICHTE VON PUNKTLADUNGEN**

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \quad (2.3)$$

Die mehrdimensionale Deltafunktion ist durch die Gleichung

$$f(\vec{r}) = \int d^3r' f(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

die für beliebige stetige Funktionen  $f(\vec{r})$  erfüllt sein muss, eindeutig definiert. In einem Integral pickt sie gerade den Wert des Integranden heraus, bei dem ihr Argument verschwindet. Die Deltafunktion ist im eigentlichen Sinne keine Funktion, sondern eine **Distribution**.<sup>3</sup>

Eine Funktion ist durch seine Funktionswerte eindeutig definiert. Bei der Deltafunktion gilt das nicht mehr. Die Werte der Deltafunktion verschwinden überall, außer am Ursprung. Am Ursprung ist der Funktionswert unendlich. Allerdings ist nicht jede Funktion mit diesen Funktionswerten die Deltafunktion, sondern nur solche, welche die obige Integralbeziehung erfüllen.

Wir können nun überprüfen, ob Gl. 2.2 für eine Ladungsdichte von Punktladungen Gl. 2.3 erfüllt

<sup>3</sup>Die Distributionentheorie ist eine Sparte der Mathematik, welche sich mit solchen Erweiterungen des Funktionenraums beschäftigen. Um eine Ableitung für Funktionen mit Sprungstellen zu definieren führte Paul Dirac (1902-1984) in seiner Arbeit "The Physical Interpretation of Quantum Dynamics"[?] die Deltafunktion ein, die erste Distribution. Hier ein Zitat für eine mathematische Einführung in die Distributionentheorie[4].



ist.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} d^3r \rho(\vec{r}, t) &\stackrel{\text{Gl. 2.3}}{=} \int_{\Omega} d^3r \underbrace{\sum_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))}_{\rho(\vec{r}, t)} \\
 &= \sum_n q_n \underbrace{\int_{\Omega} d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))}_{=1 \text{ für } \vec{r}_n(t) \in \Omega \text{ und } 0 \text{ sonst}} = Q_{\Omega}(t)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Betrachtet man nur Punktladungen, erscheint es unnötig umständlich, das System durch Ladungsdichten zu beschreiben. In vielen Fällen kennt man allerdings die Positionen nicht genau, sondern nur die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Punktladungen an bestimmten Positionen sind. Wir bezeichnen einen Satz von Positionen  $\vec{r}_{n,\alpha}$  mit einem Index  $\alpha$ . Jede Punktladungsverteilung tritt mit einer Wahrscheinlichkeit  $P_{\alpha}$  auf, wobei die Summe der Wahrscheinlichkeiten gerade eins ergeben, d.h.  $\sum_{\alpha} P_{\alpha} = 1$ . Dann erhalten wir als Mittelwert der Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \rho_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \underbrace{\sum_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_{n,\alpha})}_{\rho_{\alpha}(\vec{r})}$$

Betrachten wir viele Konfigurationen  $\alpha$  oder wie in den meisten praktischen Fällen eine kontinuierliche Schar von Verteilungen, dann sieht man sofort ein, dass die kontinuierliche Ladungsdichte das Gesamtproblem deutlich einfacher beschreibt als die Vielzahl möglicher Konfigurationen.

In der Quantenmechanik tritt das Problem noch deutlicher zum Vorschein, da wir dann nur die kontinuierlichen Wellenfunktion kennen, deren Betragsquadrat die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}) = q\Psi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r})$  beschreibt.

## 2.2 Strom und Stromdichten

### Definition 2.2 STROM

Der Strom

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

von Ladungen ist als die Ladung  $\Delta Q$  definiert, welche eine gegebene Fläche pro Zeiteinheit  $\Delta t$  passiert.

Betrachten wir zunächst einen Schwarm von Partikeln mit der Ladungsdichte  $\rho$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Der Einfachheit halber werden Ladungsdichte und Geschwindigkeit zunächst als räumlich konstant angenommen. Die Ladungen fließen durch eine Fläche  $A$ . Für ein gegebenes Zeitintervall  $\Delta t$  gibt es eine Schicht der Dicke  $\vec{n}\vec{v}\Delta t$ , welche ein Flächenelement der Fläche  $A$  erreichen. Dabei ist  $\vec{n}$  die Flächennormale.  $\vec{n}\vec{v}$  ist also gerade die Komponente der Geschwindigkeit, welche direkt auf die Fläche hinzeigt. In einem Zeitintervall  $\Delta t$  werden alle Teilchen mit einem Abstand kleiner als  $\vec{n}\vec{v}\Delta t$  die Fläche erreichen. Die Ladung  $\Delta Q$  der Teilchen, welche die Fläche  $A$  im Zeitintervall passieren, ist also  $\Delta Q = \rho A \vec{n}\vec{v}\Delta t$ . Es ist üblich, die Fläche und den Normalenvektor in eine gerichtete Größe  $\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} A\vec{n}$  zusammenzufassen.

Damit erhalten wir den Strom durch das Flächenelement  $\vec{A}$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \vec{A} \vec{v}$$

Verallgemeinern wir das Resultat auf gekrümmte Flächen, sowie auf räumlich und zeitlich veränder-

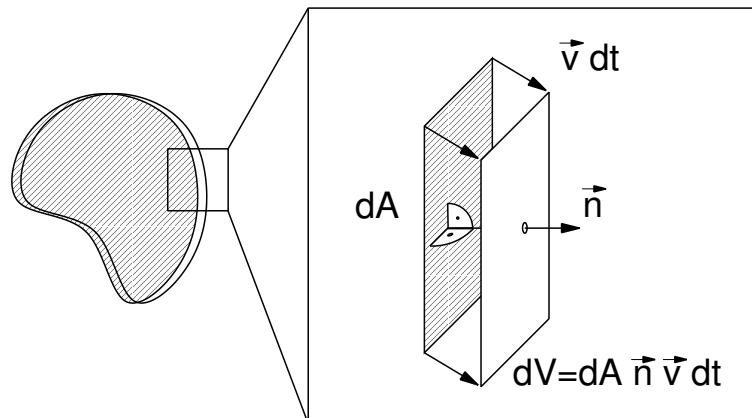


Abb. 2.2: Die Anzahl der Teilchen, die in einem Zeitintervall  $dt$  das Volumen  $\Omega$  durch das Oberflächenelement  $dA$  verlassen, ist gleich der Dichte auf der Oberfläche multipliziert mit dem Volumen  $dV = dA \vec{n} \vec{v} dt$ . Dabei ist  $\vec{n}$  der Normalenvektor auf der Oberfläche und  $\vec{v}$  ist die Geschwindigkeit der Teilchen auf der Oberfläche. Alle Teilchen, die im Intervall  $dt$  durch die Oberflächenelement geflossen sind, liegen im Volumen  $dV$ . Durch Integration über die Oberfläche  $\partial\Omega$  des Volumens  $\Omega$  erhalten wir die Gesamtzahl  $dN = \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \rho \vec{v} dt$  der Teilchen, die das Volumen im Zeitintervall verlassen. Dabei ist  $d\vec{A} = dA \vec{n}$ . Wir erhalten also  $\dot{N} = \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \rho \vec{v} dt$

liche Ladungsdichten und Geschwindigkeitsfelder, dann erhalten wir den Strom als

$$I(t) = \int_A d\vec{A} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (2.5)$$

Die Integration erstreckt sich also über die Fläche, die wir auch mit  $A$  bezeichnen.

Der Strom ist auf eine gewisse Weise eine gerichtete Größe. Je nachdem, in welche Richtung die Ladungen durch die Fläche fließen, ändert der Strom sein Vorzeichen. Dennoch ist der Strom eine Art Skalar und kein Vektor. Man nennt eine solche Größe, die unter Punktspiegelung sein Vorzeichen wechselt, einen **Pseudoskalar**.

### Definition 2.3 PSEUDOSKALAR UND PSEUDOVEKTOR [5, 6]

Ein regulärer **Skalar** ist eine einkomponentige Größe, die unter Drehungen und Spiegelungen unverändert bleibt.

Ein **Pseudoskalar** ist eine einkomponentige Größe, die unter Punktspiegelung ihr Vorzeichen wechselt. Ein Beispiel für einen Pseudoskalar ist das Spatprodukt  $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$  von drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

Ein regulärer Vektor wird **polarer Vektor** genannt.

Ein **Pseudovektor**, auch **axialer Vektor** genannt, ist eine vektorielle Größe, die unter Punktspiegelung unverändert bleibt und sich unter Drehungen wie ein regulärer (polarer) Vektor verhält. Das Kreuzprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  von zwei polaren Vektoren ist ein Pseudovektor.

In drei Dimensionen kann jede Spiegelung durch eine Punktspiegelung und eine anschließende Drehung dargestellt werden. Das bedeutet, dass die Pseudoskalare und Pseudovektoren sich zunächst wie reguläre Skalare und Vektoren transformieren, aber bei jeder Spiegelung zusätzlich ihr Vorzeichen ändern. Die Verallgemeinerung auf Räume mit geraden Dimensionen ist nicht klar.

Es gibt auch einkomponentige Größen die weder Skalare noch Pseudoskalare sind und mehrkomponentige Größen die weder Vektoren noch Pseudovektoren sind.

Als nächstes werden wir eine Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  einzuführen:

**Definition 2.4 STROMDICHTEN**

Die Stromdichte ist Ladungsdichte mal Geschwindigkeit. Die Stromdichte einer Schar von Punktladungen ist

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \lim_{r_c \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_{r_c}|} \sum_{\vec{r}_n(t) \in \Omega_{r_c}} q_n \dot{\vec{r}}_n(t) \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\Omega_{r_c}$  eine am Ort  $\vec{r}$  zentrierte Kugel mit Radius  $r_c$  und dem Volumen  $|\Omega_{r_c}| = \frac{4\pi}{3} r_c^3$ . Die Summe erstreckt sich über alle Punktladungen mit Ladung  $q_n$  und Position  $\vec{r}_n(t)$ , die sich in der Kugel befinden.

Der Strom  $I_A(t)$ , der durch eine Fläche  $A$  fließt, ist das Integral der Stromdichte über die Fläche

$$I_A(t) = \int_A d\vec{A} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (2.7)$$

Diese Definition ist analog zur Definition der Ladungsdichte Gl. 2.1. In dieser Definition, Gl. 2.7, benötigen wir jedoch kein Geschwindigkeitsfeld mehr, sondern jedes Teilchen kann seine eigene Geschwindigkeit  $\vec{v}_n(t)$  besitzen.<sup>4</sup>

**Stromdichte von Punktladungen**

Betrachten wir nun die Stromdichte einer Schar von Punktladungen, dann erhalten wir die Stromdichte als

**STROMDICHTEN VON PUNKTLADUNGEN**

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) q_n \underbrace{\dot{\vec{r}}_n(t)}_{\vec{v}_n(t)} \quad (2.8)$$

Sind die Geschwindigkeiten der Teilchen durch ein Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  gegeben, sodass  $\vec{v}_n(t) = \vec{v}(\vec{r}_n(t), t)$ , dann erhalten wir aus der obigen Definition, Gl. 2.8, die Stromdichte als

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (2.9)$$

Durch Vergleich von Gl. 2.5 und Gl. 2.9 erhalten wir den Strom aus der Stromdichte:

**Definition 2.5 STROM**

Der elektrische Strom ist die Ladung, welche pro Zeiteinheit durch eine Fläche  $A$  fließt.

$$I(t) = \int_A d\vec{A} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (2.10)$$

Beachte, dass der Strom selber kein Vektor ist, aber je nach Wahl der Richtung der Flächennormale sein Vorzeichen ändern kann.

**Stromdichte eines Drahtes**

Um den Strom in einem Draht zu bestimmen, wählen wir eine Fläche, durch welche der Draht hindurchsticht. Mit der obigen Formel Gl. 2.5 und Gl. 2.10 erhalten wir den Strom, der durch den

<sup>4</sup>Das Geschwindigkeitsfeld war eine Einschränkung, da sich dabei die Bahnen von zwei Teilchen nicht kreuzen können.

Draht fließt, als Ladungsdichte mal Geschwindigkeit mal Querschnittsfläche.<sup>5</sup>

In der Praxis kümmern wir uns häufig nicht um die genaue Form eines Drahtes, sondern betrachten ihn als Linie, also als infinitesimal dünn. Was ist die Stromdichte eines solchen Drahtes? Hier helfen uns wieder die Deltafunktionen, die es erlauben, eine Linie darzustellen. Der Leser sei hier auf den Mathematischen Anhang D.1 verwiesen.

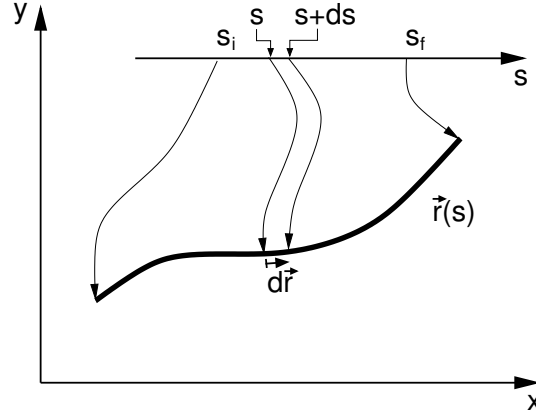


Abb. 2.3: Bahnkurve. Die Bahnkurve  $\vec{r}(s)$  ist die Abbildung eines eindimensionalen Intervalls  $[s_i, s_f]$  auf den mehrdimensionalen Raum. Ein infinitesimales Bahnelement  $d\vec{r}$  ist der Vektor  $\vec{r}(s + ds) - \vec{r}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds$  für  $ds \rightarrow 0$ . Beachte, dass die  $s$ -Achse keine Position im  $x-y$  Diagramm hat sondern nur aus Platzgründen in das Achsensystem eingezeichnet wurde.

Wir wollen einem Draht, der von einem zeitunabhängigen Strom durchflossen wird, eine Stromdichte zuordnen. Dazu stellen wir uns vor, dass geladene Teilchen mit der Ladung  $q_n = q_0$  in regelmäßigen Zeitabständen  $\Delta t$  eine vorgegebene Bahn  $\vec{r}_0(t)$  durchlaufen. Siehe dazu Abb. 2.4 auf S. 21. Im Grenzfall  $\Delta t \rightarrow 0$  beschreiben wir gerade einen Draht, der den Strom  $I = q_0/\Delta t$  trägt. (Pro Zeitintervall  $\Delta t$  fließt gerade eine Ladung  $q_0$  durch eine beliebige Ebene, die vom Draht einmal durchstoßen wird.) Die Bahn des  $n$ -ten Teilchens ist  $\vec{r}_n(t) = \vec{r}_0(t + n\Delta t)$ .<sup>6</sup> Die Stromdichte erhalten wir gemäß Gl. 2.8 als

$$\begin{aligned}
 \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sum_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) q_n \dot{\vec{r}}_n(t) \\
 &= \sum_n \Delta t \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t + n\Delta t)) \underbrace{\frac{q_0}{\Delta t}}_I \dot{\vec{r}}_0(t + n\Delta t) \\
 &\stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{=} I \int dt' \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t + t')) \dot{\vec{r}}_0(t + t') \\
 &\stackrel{t''=t+t'}{=} I \int dt'' \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t'')) \dot{\vec{r}}_0(t'') \\
 &= I \int d\vec{r}' \delta(\vec{r} - \vec{r}')
 \end{aligned}$$

Damit haben wir einen Ausdruck für die Stromdichte eines Drahtes.

<sup>5</sup>Beachte aber, dass nicht alle Ladungen in einem Draht zum Strom beitragen: Die Atomkerne sitzen auf festen Gitterpositionen und die meisten Elektronen sind fest an die Atomkerne gebunden und daher nicht sehr beweglich.

<sup>6</sup>Betrachte  $r_{n+1}(t) = r_n(t + \Delta t)$  Daraus ergibt sich rekursiv der verwendete Ausdruck.

## STROMDICHT EINES DRAHTES

Für einen Draht, der durch die Linie  $\vec{r}(s)$  beschrieben wird, und der von einem konstanten Strom  $I$  durchflossen wird, ist die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \int d\vec{r}' \delta(\vec{r} - \vec{r}'(s)) = I \int ds \frac{d\vec{r}'(s)}{ds} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(s)) \quad (2.11)$$

Das erste Linienintegral ist also gerade durch den zweiten Ausdruck definiert.  $\{\vec{r}'(s)\}$  beschreibt die eindimensionale Schar der Punkte auf dem Draht, wobei  $s$  ein kontinuierlicher eindimensionaler Parameter ist.

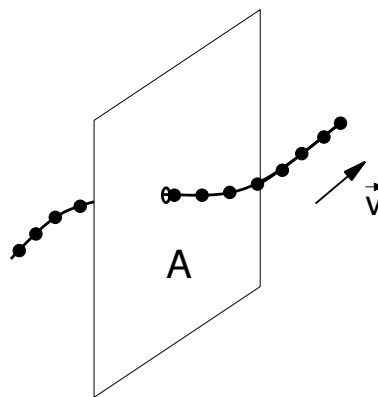


Abb. 2.4: Stromdurchflossener Draht als Reihe fließender Punktladungen

## 2.3 Ladungserhaltung

Wir wollen uns nun die Ladungserhaltung ansehen. Der Ladungserhaltungssatz ist der Prototyp aller Erhaltungssätze, die eine ganz wichtige Rolle in der Elektrodynamik, wie in fast allen Theorien, bilden.

Betrachten wir die Gesamtladung  $Q$  in einem Bereich  $\Omega$ . Sie ist die Summe aller Ladungen, welche in dem Bereich enthalten sind. Wenn keine Ladungen erzeugt oder vernichtet werden können, dann ändert sich die Gesamtladung im Bereich  $\Omega$  genau dann, wenn Ladungen durch die Oberfläche  $\partial\Omega$  in den Bereich eindringen, oder den Bereich verlassen. Damit erhalten wir die **Integrale Form des Ladungserhaltungssatzes**

## INTEGRALER LADUNGSERHALTUNGSSATZ

$$\frac{dQ(t)}{dt} + I_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.12)$$

Dabei ist  $I_{\partial\Omega}$  der Strom, der durch die Oberfläche aus dem Bereich herausfließt. Ladungen, die in den Bereich eindringen, tragen entsprechend Ihrer Geschwindigkeit mit umgekehrten Vorzeichen bei.

Der integrale Ladungserhaltungssatz kann in den differentiellen Ladungserhaltungssatz überführt werden. Zunächst betrachten wir die einzelnen Anteile des integralen Ladungserhaltungssatzes

Gl. 2.12 getrennt.

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= \int_{\Omega} d^3r \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ I_{\partial\Omega} &= \int_{\partial\Omega} d\vec{A} \vec{j}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde das **Gauß Theorem** angewandt, das im Anhang D.2.4 beschrieben ist.

Wir erhalten daher

$$\int_{\Omega} d^3r \left( \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \right) = 0$$

Damit diese Gleichung für beliebige Bereiche  $\Omega$  gilt, muss nicht nur das Integral sondern auch der Integrand an jedem Ort verschwinden. Das führt auf den **differentiellen Ladungserhaltungssatz**

#### DIFFERENTIELLER LADUNGSERHALTUNGSSATZ

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.13)$$

#### Ein weiterer Beweis des Ladungserhaltungssatzes

Wir hatten den integralen Erhaltungssatz eingeführt, weil er uns intuitiv erscheint. Dieses intuitive Gefühl kann allerdings leicht täuschen. Deshalb möchte ich hier nochmals die eigentliche Grundlage des Satzes darstellen.

Dazu betrachten wir nochmals Teilchen, die jeweils eine Ladung  $q_n$  tragen und auf ihren Bahnen  $\vec{r}_n(t)$  unterwegs sind. Die Erhaltung der Ladung folgt alleine aus der Annahme, dass sich die Einzelladungen der Teilchen nicht mit der Zeit ändern und Teilchen weder erzeugt oder vernichtet werden können. Aus dieser Annahme können wir den differentiellen Ladungserhaltungssatz für ein System von Punktladungen ableiten. Dazu vergleichen wir die Ladungsdichten, Gl. 2.3 auf S. 16, und Stromdichten, Gl. 2.8 auf S. 19, von Punktladungen.

Nun vergleichen wir die entsprechenden Ausdrücke für die Strom und Ladungsdichten.

$$\begin{aligned}\partial_t \rho(\vec{r}, t) &\stackrel{\text{Gl. 2.3}}{=} \sum_n q_n \partial_t \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) = \sum_n q_n \left( -\dot{\vec{r}}_n \right) \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left[ \sum_n q_n \dot{\vec{r}}_n(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \right] \stackrel{\text{Gl. 2.8}}{=} -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Dies ist nichts weiter wie der differentielle Ladungserhaltungssatz, aus dem wiederum der integrale Erhaltungssatz abgeleitet werden kann.

Erhaltungssätze spielen eine besondere Rolle in der Physik, weil sie Voraussagen erlauben, die beliebig weit in die Zukunft reichen. Aus diesem Grund bilden Größen wie Energie und Impuls, die Erhaltungsgrößen sind, das Fundament der physikalischen Beschreibung von Naturphänomenen.

#### Kirchhoffsche Knotenregel

Als Anwendung des Ladungserhaltungssatzes stellen wir die **Kirchhoffsche Knotenregel** vor, welche für die Analyse von Stromkreisen in der Elektronik sehr hilfreich ist. Die Kirchhoffsche Knotenregel beschreibt eine elektronische Schaltung, die als Netz von Drähten und elektronischen Bauteilen beschrieben wird. Es sagt, dass an einem Kreuzungspunkt mehrerer Drähte die Anzahl der auf den Kreuzungspunkt zufließenden Ströme gleich der Anzahl der wegfließenden Ströme ist.

Betrachten wir einen Knoten, also den Kreuzungspunkt verschiedener Drähte: Nun wählen wir einen Bereich  $\Omega$  aus, der den Knoten umschließt. Durch die Oberfläche des Bereichs verläuft eine Anzahl von  $N$  Drähten, wovon jeder den Strom  $I_n$  führt. Da sich die Stromdichte im Bereich nicht ändert, da die Drähte keine Ladung aufnehmen können, gilt wegen der Ladungserhaltung  $\sum_n I_n = \oint_A d\vec{A} \vec{j}(r) = \partial_t \int_\Omega d^3r \rho = 0$ . Dabei ist der Strom immer so definiert, dass ein austretender Strom das positive Vorzeichen und ein eintretender Strom das negative Vorzeichen erhält.

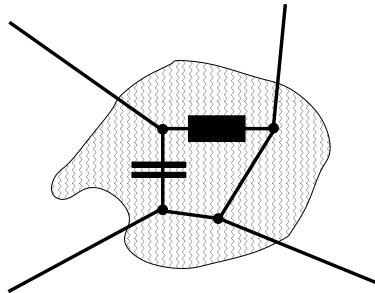


Abb. 2.5: Zur Kirchhoffschen Knotenregel.





## Chapter 3

# Maxwellgleichungen und Lorentzkraft (4h)

### 3.1 Die Grundgleichungen der Elektrodynamik

Die Elektrodynamik ist vollständig durch drei Gleichungssysteme bestimmt.

1. die Maxwellgleichungen (Bewegungsgleichung für Felder),
2. die Zustandsgleichungen und
3. die Lorentzkraft (Bewegungsgleichung für Teilchen)

Diese Gleichungen dienen uns als Postulate auf denen wir die Elektrodynamik aufbauen werden. Wir stellen sie zunächst kommentarlos zusammen, unter anderem, damit sie später zum Nachschlagen dienen. Im Anschluss werden wir diese Gleichungen einzeln diskutieren. In diesem Kapitel soll zunächst anhand von einfachen Beispielen die physikalische Bedeutung dieser Gleichungen vermittelt werden.



Abb. 3.1: James Clark Maxwell, 1831-1879

#### MAXWELLGLEICHUNGEN

Die **Maxwellgleichungen**<sup>a</sup> bestimmen die **elektrischen und magnetischen Felder**  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  bei gegebener Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}, t)$  und Stromdichteverteilung  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{Gaußsches Gesetz} \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{keine magnetischen Monpole} \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad \text{Faradaysches Gesetz} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j} \quad \text{Amperes Gesetz und} \quad (3.4)$$

Maxwellscher Verschiebungsstrom

<sup>a</sup>Schottischer Naturwissenschaftler James Clerk Maxwell 1831-1879.

## ZUSTANDSGLEICHUNGEN

Die **elektrischen und magnetischen Erregungen**  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  sind über die **Zustandsgleichungen** mit den elektrischen und magnetischen Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  verknüpft.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.5)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (3.6)$$

Die Zustandsgleichungen reduzieren damit die Anzahl der unabhängigen Felder in den Maxwellgleichungen. Dabei sind  $\epsilon$  die **Dielektrizitätskonstante** und  $\mu$  die **Induktionskonstante**. Im Vakuum haben sie die Werte  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kg m}^3}$  und  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{kg m}}{\text{A}^2 \text{s}^2}$ .

## LORENTZKRAFT

Die **Lorentzkraft** beschreibt die Kräfte, welche bei gegebenen elektrischen und magnetischen Feldern auf geladene Teilchen wirken.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})) \\ &= \int d^3r \left( \rho(r) \vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dabei beschreibt der erste Ausdruck die Kraft  $\vec{F}$  auf ein Punktteilchen mit der Ladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Die zweite Gleichung beschreibt die Kraft  $\vec{F}$  auf eine Ladungs- und Stromdichteverteilung.

## 3.2 Lorentz Kraft

Zunächst machen wir uns mit der Lorentzkraft<sup>1</sup>, Gl. 3.7, vertraut,

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) = \int d^3r \left( \rho(r) \vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right)$$

welche die Wirkung der Felder auf die Bewegung von Teilchen beschreibt. Die Lorentzkraft ist damit die Verknüpfung zwischen Elektrodynamik und der klassischen Mechanik.

Um ein erstes Gefühl für die Wirkung der Felder auf Punktladungen zu erhalten, untersuchen wir die Bewegung in homogenen Feldern.

### 3.2.1 Bewegung im homogenen elektrischen Feld

Wir betrachten hier als einfachstes Beispiel die Bewegung eines geladenen Teilchens im homogenen elektrischen Feld. Das elektrische Feld ist also im Raum als auch zeitlich konstant. Ein homogenes elektrisches Feld kann zum Beispiel in einem Plattenkondensator realisiert werden.

Die Bewegungsgleichung ist also

$$m \ddot{\vec{r}} = q \vec{E} \quad (3.8)$$

Die Kraft  $q\vec{E}$  ist konstant, weil ein homogenes elektrisches Feld nicht vom Ort abhängt. Daher ist dieses Problem analog zum freien Fall.

<sup>1</sup>Niederländischer Physiker Hendrick Antoon Lorentz, 1853-1928. Nobelpreis 1902 für die mathematische Theorie des Elektrons. Auch bekannt für die Lorentztransformationen und die Lorentz Kontraktion, welche die Grundlage der Relativitätstheorie bilden.

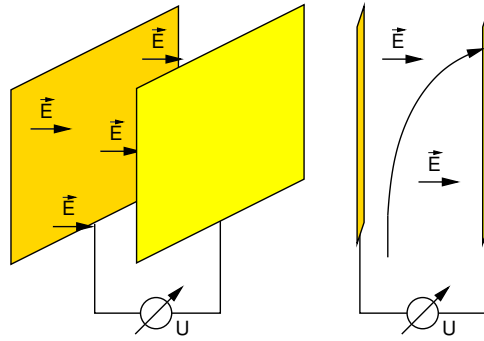


Abb. 3.2: Plattenkondensator

Im homogenen Feld kann die Differentialgleichung einfach durch Integration gelöst werden.

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{m} \vec{E} \quad (3.9)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(0) + \frac{q}{m} \vec{E} t \quad (3.10)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \dot{\vec{r}}(0)t + \frac{q}{2m} \vec{E} t^2 \quad (3.11)$$

Die Bahnkurven sind also Parabeln. Positive Ladungen, d.h.  $q > 0$  werden also in Richtung des Feldes beschleunigt und negative Ladungen entgegen dem elektrischen Feld.

### 3.2.2 Bewegung im homogenen magnetischen Feld

Ein homogenes magnetisches Feld wird zum Beispiel in einer Spule realisiert. Eine Spule besteht aus einem stromdurchflossenen Draht, der um einen Zylinder gewickelt ist.

$$m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

Der Einfachheit halber wählen wir ein Koordinatensystem, bei dem die z-Achse parallel zum magnetischen Feld steht, sodass  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ . Damit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B_z \quad (3.12)$$

$$m\ddot{y} = -q\dot{x}B_z \quad (3.13)$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad (3.14)$$

Die letzte Gleichung, Gl. 3.14, sagt gerade, dass die Bewegung in Richtung des Magnetfeldes, also in z-Richtung, durch das Magnetfeld nicht beeinflusst wird. Die ersten beiden Gleichungen, Gl. 3.12 und Gl. 3.13, sind gekoppelt. Wir vereinfachen sie, indem wir zunächst die Lösungen für die Geschwindigkeiten  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$  bestimmen. Anschließend erhalten wir die Pfade  $\vec{r}(t)$  aus  $\vec{v}(t)$  durch Integration.

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{q}{m} v_y B_z & \wedge & \quad \dot{v}_y = -\frac{q}{m} v_x B_z \\ \Rightarrow \ddot{v}_x &= \frac{q}{m} \dot{v}_y B_z = -\left(\frac{q}{m} B_z\right)^2 v_x \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung für  $v_x$  entspricht also gerade der eines harmonischen Oszillators. Wir erhalten also die Lösung

$$v_x(t) = a \cos\left(\frac{q}{m} B_z t\right) + b \sin\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \quad (3.15)$$

wobei die Koeffizienten  $a, b$  noch aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen.

Zunächst bestimmen wir aber noch die zweite Geschwindigkeitskomponente  $v_y$  aus Gl. 3.12.

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &\stackrel{\text{Gl. 3.12}}{=} \frac{q}{m} v_y B_z \quad \Rightarrow \quad v_y = \left( \frac{q}{m} B_z \right)^{-1} \dot{v}_x \\ \Rightarrow v_y &\stackrel{\text{Gl. 3.15}}{=} \left( \frac{q}{m} B_z \right)^{-1} \left( -a \frac{q}{m} B_z \sin\left(\frac{q}{m} B_z t\right) + b \frac{q}{m} B_z \cos\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \right) \\ &= -a \sin\left(\frac{q}{m} B_z t\right) + b \cos\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Koeffizienten  $a, b$  können durch die Anfangsbedingungen ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0) \cos\left(\frac{q}{m} B_z t\right) + v_y(0) \sin\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \\ v_y(t) &= v_y(0) \cos\left(\frac{q}{m} B_z t\right) - v_x(0) \sin\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \\ v_z(t) &= v_z(0) \end{aligned}$$

Die Absolutgeschwindigkeit der Bahn bleibt konstant. Der Betrag der Projektion  $\vec{v}_\perp$  der Geschwindigkeit auf die Ebene senkrecht zum Magnetfeld ist

$$\begin{aligned} v_\perp^2(t) &= v_x^2 + v_y^2 \\ &= v_x(0)^2 \cos^2(\dots) + 2v_x(0)v_y(0) \cos(\dots) \sin(\dots) + v_y(0)^2 \sin^2(\dots) \\ &\quad + v_y(0)^2 \cos^2(\dots) - 2v_x(0)v_y(0) \cos(\dots) \sin(\dots) + v_x(0)^2 \sin^2(\dots) \\ &= (v_x(0)^2 + v_y(0)^2) \underbrace{(\cos^2(\dots) + \sin^2(\dots))}_{=1} \\ \Rightarrow |\vec{v}_\perp(t)| &= |\vec{v}_\perp(0)| \end{aligned}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ändert sich nicht, weil die Kraft immer senkrecht zur Geschwindigkeit steht, und deshalb vom Magnetfeld keine Arbeit verrichtet wird.

Durch Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= C_x + \frac{mv_x(0)}{qB_z} \sin\left(\frac{q}{m} B_z t\right) - \frac{mv_y(0)}{qB_z} \cos\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \\ y(t) &= C_y + \frac{mv_y(0)}{qB_z} \sin\left(\frac{q}{m} B_z t\right) + \frac{mv_x(0)}{qB_z} \cos\left(\frac{q}{m} B_z t\right) \\ x(t) &= z(0) + v_z(0)t \end{aligned}$$

Die Bahn bildet also eine Kreisbahn, bzw. eine Spirale, um die Achse parallel zum Magnetfeld. Der Radius der Bahn ist

$$r_c = \sqrt{(x(t) - C_x)^2 + (y(t) - C_y)^2} = \left| \frac{mv_\perp}{qB_z} \right|$$

Die Integrationskonstanten  $C_x, C_y$  beschreiben gerade das Zentrum der Kreisbahn, bzw. die Achse der Spiralbahn.

#### ZYKLOTRONRADIUS UND ZYKLOTRONFREQUENZ

Der Radius der Bahn ist der **Zyklotronradius**

$$r_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m|\vec{v}_\perp|}{|q\vec{B}|} = \frac{|\vec{v}_\perp|}{|\vec{\omega}_c|} \quad (3.17)$$

Die Frequenz

$$\vec{\omega}_c \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{q}{m} \vec{B} \quad (3.18)$$

wird **Zyklotronfrequenz** genannt.

## DREHSINN UND WINKELGESCHWINDIGKEIT

Richtet man den Daumen der rechten Hand in Richtung der Winkelgeschwindigkeit aus, dann zeigen die gekrümmten Finger in Richtung der Drehbewegung.

Zyklotronradius und Zyklotronfrequenz macht man sich in unterschiedlichen Experimenten zunutze:

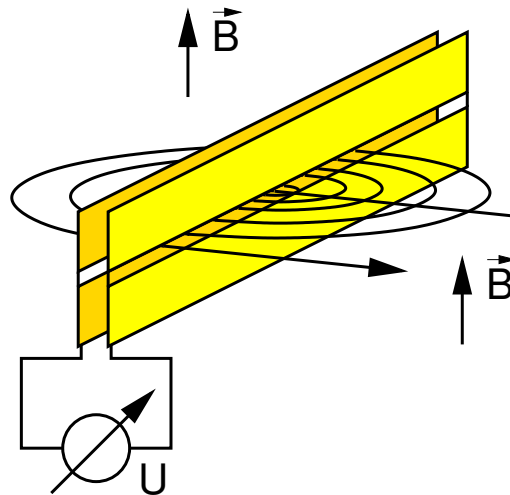


Abb. 3.3: Darstellung eines Zyklotrons. Die Teilchenbahn gehört zu einem negativ geladenen Teilchen, was man anhand des Drehsinns der Bahn erkennt. Die Spannungsquelle ist eine Wechselstromquelle, deren Kreisfrequenz mit der Zyklotronfrequenz identisch ist.

Der Name der Zyklotronfrequenz und des Zyklotronradius kommt vom Zyklotron, einem Teilchenbeschleuniger, wie er in der Teilchenphysik eingesetzt wird. Man untersucht den Aufbau von Elementarteilchen, indem man sie mit großer Geschwindigkeit aufeinanderschießt und anschließend die Bruchstücke der Kollision untersucht. Auf diese Weise kann man die Reaktionen von Elementarteilchen bei unglaublich hohen Energien untersuchen. Man nennt diesen Zweig deshalb auch Hochenergiephysik.

Ein Zyklotron besteht aus geladenen Teilchen, die in einem Magnetfeld durch einen Plattenkondensator beschleunigt werden. Wir wollen zum Beispiel hochenergetische Elektronen erzeugen. Die Elektronen werden im Magnetfeld auf eine Kreisbahn gezwungen. Die Frequenz, mit der die Kreisbahn durchlaufen wird, ist konstant, weil Ladung und Masse des Teilchens feste Werte haben und das Magnetfeld zeitlich konstant ist. Deshalb lassen wir die Teilchen durch Spalt in einem Plattenkondensator laufen, dessen elektrisches Feld mit der Zyklotronfrequenz oszilliert. Teilchen, die zum richtigen Zeitpunkt durch den Kondensator laufen, werden durch sein elektrisches Feld beschleunigt. Wegen der Resonanz der Kreisbahn und der Spannung des Kondensators, wird ein solches Teilchen bei wiederholtem Durchlauf wieder synchron mit dem elektrischen Feld ankommen und daher weiter beschleunigt. Bei wiederholtem Durchlauf kann es auf diese Weise sehr hohe Geschwindigkeiten erreichen. Während sich das Teilchen beschleunigt, wird der Radius der Bahn, der Zyklotronradius, immer größer. Indem man die Teilchen bei einem bestimmten Radius aus dem Magnetfeld ablenkt, erhält man einen Teilchenstrahl mit hoher und wohldefinierter kinetischer Energie.

Eine zweite Anwendung der Zyklotronfrequenz ist die Bestimmung der effektiven Masse von Ladungsträgern in Materialien. Elektronen verhalten sich in einem Festkörper beinahe wie freie Teilchen. Man nennt solche Teilchen Quasiteilchen, weil sie sich zwar wie Teilchen verhalten, ihre Eigenschaften sich aber nicht nur vom freien Elektron, sondern auch vom Kristall, in dem sie sich bewegen, ableiten. Die Wechselwirkung mit dem Kristall führt dazu, dass sich die Masse dieser Quasiteilchen, die effektive Masse, stark von der eines freien Elektrons unterscheidet und außerdem von der Bewegungsrichtung relativ zur Orientierung des Kristalls abhängt. Durch Anlegen eines mag-

netischen Feldes bringt man die freien Ladungsträger auf eine Kreisbahn. Mikrowellen beschleunigen die Ladungsträger, wenn sie in Resonanz mit der Kreisbahn der Ladungsträger, d.h. der Zyklotronfrequenz, sind. Die Strahlung wird also absorbiert, weil ihr ständig Energie entzogen wird. Aus der gemessenen Absorptionsfrequenz  $\omega_c$  erhält man die effektive Masse als  $m = q|B|/\omega_c$ .

### 3.3 Darstellung von Vektorfeldern

Ein Vektorfeld stellt man graphisch durch Feldlinien dar. Dazu zieht man eine Linie immer in Richtung des Feldes. Ich stelle mir ein Vektorfeld als die Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit vor. Die Flüssigkeit hätte dann in jedem Punkt  $(\vec{r}, t)$  die Geschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ . Wirft man einen Ball in die Flüssigkeit, dann bewegt sich dieser entlang einer Feldlinie. Eine sehr nützliche Beobachtung ist, dass sich Feldlinien nicht kreuzen können. Sie können nur an einem Punkt, wo das Feld verschwindet, zusammen oder auseinanderlaufen. Der Grund ist einfach, dass das Feld an einem Kreuzungspunkt zwei unterschiedliche Werte aufweisen müsste.

Eine **Quelle** ist dann ein Punkt wo Flüssigkeit zugefügt wird, sodass die Feldlinien von diesem Punkt wegstreben, so als ob man Wasser in eine Badewanne einlassen würden. Eine **Senke** ist das Gegenteil: Hier wird Flüssigkeit entnommen, so wie wenn man in der Badewanne den Stöpsel zieht. Die Feldlinien streben also auf eine Senke zu. Die Quellenstärke ist die Divergenz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  des Vektorfeldes.

Stellen wir uns eine Badewanne vor, in die Wasser eingelassen wird. Die Höhe des Wasserstandes entspricht der "zweidimensionalen Dichte" des Wassers (Menge Wasser pro Fläche). Wir nehmen an, dass die Änderung des Wasserstandes räumlich und zeitlich als konstant angenommen werden kann. Die Wassermenge, die hinzugefügt wird, muss also von Wasserstrahl wegfließen, um den Wasserstand konstant zu halten. Die Menge des Wassers, die hinzugefügt wird, ist also gleich der Menge des Wassers, das von dem Wasserstrahl wegfließt. Diese Wassermenge ist gerade  $\int d^2r \dot{\rho} = \oint d\vec{A} \cdot \vec{j} = \int d^2r \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{\rho=\rho_0}{=} \rho \int d^2r \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ . Die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}(\vec{r})$  ist also gleich  $\dot{\rho}/\rho$ , also die Wassermenge pro Fläche im Verhältnis zum Wasserstand (der Dichte), die pro Zeiteinheit in die Wanne einläuft.

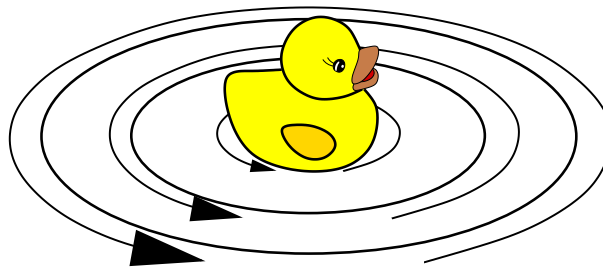


Abb. 3.4: Darstellung der Rotation. Stellen wir uns das Vektorfeld als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit dar, dann entspricht die Rotation der doppelten Winkelgeschwindigkeit, mit der sich eine Badeente auf der Flüssigkeit um die eigene Achse drehen würde

Bildet die Flüssigkeit einen Strudel, so wird die Stärke des Strudels durch die Rotation  $\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r})$  des Vektorfeldes ausgedrückt. Die Rotation des Badewassers entspricht gerade der doppelten Winkelgeschwindigkeit mit der sich eine Badeente im Kreis dreht (Siehe Abb. 3.4).

Wir betrachten dazu einen Strudel, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}_0$  dreht. Ein solches Geschwindigkeitsfeld hat die Form  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}$ . Dieses Geschwindigkeitsfeld haben wir bereits in der klassischen Mechanik bei der Drehbewegung eines starren Körpers kennengelernt.

Wir überprüfen zunächst, ob dieses Geschwindigkeitsfeld tatsächlich gerade einer konstanten Winkelgeschwindigkeit entspricht: Ein Teilchen, das diesem Geschwindigkeitsfeld folgt, bewegt sich auf einer Kreisbahn um die Drehachse, die parallel zu  $\vec{\omega}_0$  steht. Der Abstand der Bahn von der Achse sei  $R$ . Die Geschwindigkeit  $V$  des Teilchens ist  $V = |\vec{\omega}_0 \times \vec{r}| = |\vec{\omega}_0|R$ . Die Kreisbahn hat den Umfang  $2\pi R$ , sodass wir die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  aus  $\frac{2\pi R}{T} = V = |\vec{\omega}|R$  als  $\omega = \frac{2\pi}{T} = |\vec{\omega}_0|$  erhalten.

Die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}$  ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) \\ &\stackrel{\text{Gl. C.9(S. 231)}}{=} \underbrace{\vec{\omega}_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{r})}_{3\vec{\omega}_0} + \underbrace{\vec{r}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}_0)}_0 - \underbrace{(\vec{\omega}_0 \vec{\nabla}) \cdot \vec{r}}_{\vec{\omega}_0} - \underbrace{(\vec{r} \vec{\nabla}) \cdot \vec{\omega}_0}_0 = 2\vec{\omega}_0 \end{aligned}$$

also die doppelte Winkelgeschwindigkeit.

### 3.4 Maxwellgleichungen und ihre Interpretation

Zusammen mit der Lorentzkraft bilden die Maxwellgleichungen Gl. 3.1-3.4 auf S. 25 zusammen mit den Zustandsgleichungen Gl. 3.5-3.5 die Grundlage der Elektrodynamik.

#### 3.4.1 Gaußsches Gesetz

Das Gaußsche Gesetz Gl. 3.1 zusammen mit der Zustandsgleichung Gl. 3.5  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$  sagt, dass die Ladungen die Quellen und Senken der dielektrischen Erregung  $\vec{D}$  sind.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Positive Ladungen entsprechen den Quellen des Feldes und negative Ladungen entsprechen seinen Senken. Die Feldlinien entstehen also an den positiven Ladungen und laufen auf die negativen Ladungen zu.

Das Gaußsche Gesetz kann mit Hilfe des Gaußschen Satzes, (siehe Anhang D.2.4), umgewandelt werden

$$Q_\Omega = \int_\Omega d^3r \rho = \int_\Omega d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \cdot \vec{D}$$

Unter der Annahme, dass  $\epsilon$  konstant ist, kann man also die Ladung in einem Volumen  $\Omega$  bestimmen, indem man das elektrische Feld, bzw. die elektrische Erregung, über seine Oberfläche  $\partial\Omega$  integriert. Zeigt das elektrische Feld mehrheitlich nach außen, enthält das Volumen eine positive Ladung. Zeigt das Feld mehrheitlich nach innen, enthält das Volumen eine negative Ladung. Das elektrische Feld kann anhand der Lorentzkraft, die auf eine unbewegte Probeladung wirkt, experimentell bestimmt werden.

#### Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel

Das Gaußsche Gesetz lässt sich besonders einfach für hochsymmetrische Probleme einsetzen. Betrachten wir als Beispiel eine homogen geladene Kugel mit Ladung  $Q$  und Radius  $r_c$ . Der Einfachheit halber legen wir das Zentrum der Kugel in den Ursprung. Eine Kugel ist symmetrisch bezüglich beliebiger Drehungen um sein Zentrum und bezüglich Spiegelung an einer beliebigen Ebene durch sein Zentrum. Diese Symmetrien sind durch die Ladungsverteilung erfüllt. Aufgrund der Kugelsymmetrie, zeigen die Feldlinien vom Zentrum weg (oder auf das Zentrum hin) und der Betrag des Feldes ist von der Richtung unabhängig, d.h.

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = f(|\vec{r}|) \underbrace{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{\vec{e}_r}$$

Dabei ist  $\vec{e}_r$  der Einheitsvektor, der radial nach außen zeigt.  $f(r)$  ist eine noch zu bestimmende Funktion. Soweit die Symmetrie. Jetzt kommt das Gaußsche Gesetz zum Zug. Wir wählen zunächst eine Kugel  $\Omega_r$  mit Radius  $r$ , die im Zentrum lokalisiert ist. Nun bestimmen wir die Ladung innerhalb von  $\Omega_r$

$$Q_{\Omega_r} = \int_{\Omega_r} d^3r \rho(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} r_c^3} = Q \left( \frac{r}{r_c} \right)^3 & \text{für } r < r_c \\ Q & \text{für } r \geq r_c \end{cases}$$

Dies setzen wir in die integrale Form des Gaußschen Gesetzes ein

$$Q_{\Omega_r} = \oint_{\partial\Omega_r} d\vec{A} \vec{D} = \oint_{\partial\Omega_r} d^2A \underbrace{\vec{e}_r \vec{D}}_{|\partial\Omega_r|} = 4\pi |\vec{r}|^2 \underbrace{f(|\vec{r}|)}_{=1} \underbrace{\vec{e}_r^2}_{=1}$$

Durch Auflösen nach  $f(r)$  und Einsetzen der Ladung in der Kugel  $\Omega_r$  erhalten wir

$$f(|\vec{r}|) = \frac{Q_{\Omega_r}}{4\pi |\vec{r}|^2} = \frac{1}{4\pi |\vec{r}|^2} \begin{cases} Q \left( \frac{r}{r_c} \right)^3 & \text{für } r < r_c \\ Q & \text{für } r \geq r_c \end{cases}$$

Damit erhalten wir die dielektrische Erregung

$$\vec{D}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \begin{cases} \frac{1}{r_c^3} |\vec{r}| & \text{für } r < r_c \\ \frac{1}{|\vec{r}|^2} & \text{für } r \geq r_c \end{cases}$$

Das elektrische Feld erhalten wir mit Hilfe der Zustandsgleichung Gl. 3.5

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \begin{cases} \frac{1}{r_c^3} |\vec{r}| & \text{für } r < r_c \\ \frac{1}{|\vec{r}|^2} & \text{für } r \geq r_c \end{cases}$$

Zu beachten ist, dass wir diesem elektrischen Feld ein weiteres überlagern können, das keine Divergenz besitzt.<sup>2</sup> Ein solches Feld ist zum Beispiel das homogene elektrische Feld. Beachte hier, dass die Überlagerung die Kugelsymmetrie des Feldes zerstört.<sup>3</sup>

### 3.4.2 Keine magnetischen Monopole

Die zweite Maxwellsche Gleichung Gl. 3.2,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

wird auch das Gaußsche Gesetz der Magnetostatik genannt. Sie besagt, dass Magnetfelder keine isolierten Quellen oder Senken besitzen. Es gibt also keine isolierten magnetischen Ladungen. Diese würden sich dadurch auszeichnen, dass Feldlinien an ihnen entspringen. Magnetische Feldlinien sind also immer geschlossen. Sie können aber, wie im homogenen Magnetfeld, auch einen Umweg ins Unendliche nehmen.

Die Gleichung schließt aber keine Punktmagneten aus, bei dem eine Quelle und Senken gleicher Stärke nur infinitesimal verschoben, fast am selben Ort sitzen und sich daher in Summe wegheben. An einem Punktmagneten laufen die Feldlinien auf der einen Seite von dem Magneten weg, und auf der anderen Seite laufen sie auf den Punkt zu.

<sup>2</sup>Dies resultiert daraus, dass die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung als Superposition einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung darstellbar ist.

<sup>3</sup>Betrachten wir das Problem in einem Einkristall, dann wird die Isotropie des Problems durch das umgebende Material verletzt. Dies spiegelt sich dadurch wieder, dass die Dielektrizitätskonstante kein Skalar, sondern ein Tensor ist. In diesem Fall ist unsere Herleitung nicht mehr korrekt.



### 3.4.3 Faradaysches Induktionsgesetz

Das Faradaysche Induktionsgesetz Gl. 3.3,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

sagt, dass elektrische Felder nicht nur von Ladungen, sondern auch von zeitlich veränderlichen Magnetfeldern erzeugt werden können. Allerdings hat ein solches elektrisches Feld keine weiteren Quellen und Senken, sondern weist Feldlinien auf, die sich selber schließen.

Ändert man das magnetische Feld, so erzeugt man im elektrischen Feld einen "Strudel", also eine Rotation.

#### Induzierte Spannungen in einer Leiterschleife

Als Anwendung betrachten wir eine Leiterschleife. Die Leiterschleife sei von einem Magnetfeld  $\vec{B}$  durchströmt, das sich mit der Zeit ändert. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass man einen Magneten an der Leiterschleife vorbeizieht. Die Änderung des Magnetfelds induziert ein kreisförmiges elektrisches Feld und damit einen Strom in der Leiterschleife.

Wenn der Stromkreis unterbrochen wird, dann baut sich eine Gegenspannung auf, die verhindert, dass die induzierten Ströme fließen. Diese Spannung kann mit einem Spannungsmesser bestimmt werden, oder nutzbringend als Stromquelle eingesetzt werden.

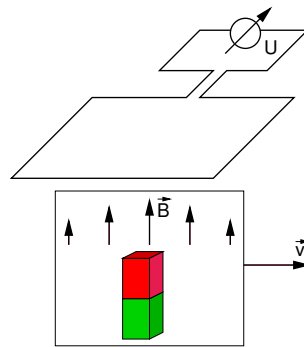


Abb. 3.5: Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt elektrische Felder und induziert damit eine Spannung in einer Leiterschleife. Die Magnetfeldänderung wird durch einen Magneten erzeugt der unter der Schleife vorbeigezogen wird.

An dieser Stelle sollte sich der Leser mit dem **Stokesschen Satz**, Gl. D.2 in Anhang D.3 auf S. 239 vertraut machen.

Betrachten wir die Fläche  $A$ , die durch die Leiterschleife aufgespannt wird, dann erhalten wir

$$\int_A d\vec{A} \partial_t \vec{B} \stackrel{\text{Gl. 3.3}}{=} - \int_A d\vec{A} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \stackrel{\text{Stokes}}{=} - \oint_{\partial A} d\vec{r} \vec{E} \quad (3.19)$$

Es zeigt also ein elektrisches Feld entlang der Leiterschleife. Dieses Feld beschleunigt Ladungen aufgrund der Lorentzkraft. Und zwar fließen positive Ladungen im Uhrzeigersinn, wenn  $\partial_t \vec{B}$  aus der Uhr herauszeigt. Negative Ladungen, wie die Elektronen, fließen im Gegenuhrzeigersinn.

#### Definition 3.1 SPANNUNG

Die Spannung zwischen zwei Punkten im Raum ist als das Linienintegral des elektrischen Feldes zwischen den zwei Punkten definiert.

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \int d\vec{r} \vec{E}(r) \quad (3.20)$$

**Definition 3.2** *MAGNETISCHER FLUSS*

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B}(r) \quad (3.21)$$

Das Induktionsgesetz sagt dann gemäß Gl. 3.19, dass die Spannung gerade der Änderung des magnetischen Flusses entgegengesetzt ist.

$$U = -\partial_t \Phi$$

**Editor: Vorzeichen!!!, Illustration Lichtmaschine, Schema: Potential entlang der offenen Leiterschleife.**

**Lichtmaschine**

Das Induktionsgesetz ist die Grundlage eines Stromgenerators, bzw einer Lichtmaschine, dessen Prinzip in Abb. 3.4.3 dargestellt ist. In einer einfachen Lichtmaschine werden Spulen an alternierend angeordneten Magneten vorbeigedreht, wodurch eine Wechselspannung induziert wird.

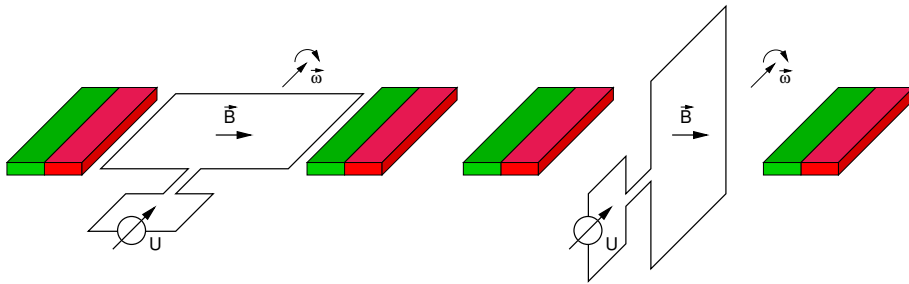


Abb. 3.6: Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld in einer Leiterschleife kann durch drehen der Leiterschleife in einem festen Magnetfeld erzeugt werden. Dies kann verwendet werden um mechanische Energie in elektrische Energie umzuwandeln. In diesem Fall entsteht Wechselstrom. Die Traditionellen Lichtmaschinen sind Gleichstromlichtmaschinen. Diese wechseln die Kontakte in jeder Halbdrehung. Moderne Lichtmaschinen sind Drehstromlichtmaschinen, die das Magnetfeld selber wieder durch Spulen erzeugen. Man kann das Prinzip der Lichtmaschine umkehren und durch Anlegen einer Wechsel, oder Gleichstroms die Drehbewegung erzeugen. Dann liegt ein Elektromotor vor.

**Editor: Achtung Vorzeichen vielleicht falsch!**

**3.4.4 Amperesches Gesetz und Maxwellscher Verschiebungsstrom**

Das letzte Maxwellsche Gesetz, Gl. 3.3,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}$$

enthält zwei Aspekte, das Amperesche Gesetz und den Maxwellschen Verschiebungsstrom.

**Amperesches Gesetz**

Amperes Gesetz sagt, dass Ströme magnetische Felder verursachen

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (3.22)$$

Das Ampersche Gesetz gilt in dieser Form, wenn sich die elektrische Erregung  $\vec{D}$  nicht ändert.

Das Gaußsche Gesetz, Gl. 3.1, erlaubt es uns, die Ladung in einem Volumen aus einem Oberflächenintegral der elektrischen Erregung  $\vec{D}$  über die Oberfläche des Volumens zu bestimmen. Amperes Gesetz erlaubt es uns analog den Strom, der durch eine Fläche  $A$  hindurchfließt, aus einem Linienintegral der magnetischen Erregung  $\vec{H}$  entlang dem Rand der Fläche zu bestimmen. In diesem Fall ist allerdings zu berücksichtigen, dass die elektrische Erregung sich nicht mit der Zeit ändert. Andernfalls kann eine zusätzliche magnetische Erregung erzeugt werden.

Um den Zusammenhang zwischen dem Strom durch eine Fläche und dem Linienintegral der magnetischen Erregung zu ermitteln verwenden wir den Stokesschen Satz. (siehe Appendix D.3.)

$$I_A = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \stackrel{\text{Gl. 3.22}}{=} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{H} \quad (3.23)$$

Indem wir die magnetische Erregung einmal am Rand einer Fläche herumintegrieren, erhalten wir den Strom, der durch diese Fläche fließt.

### Magnetfeld eines geraden, stromdurchflossenen Drahtes

Ein stromdurchflossener gerader Leiter ist rotationssymmetrisch um sein Achse, und spiegelsymmetrisch bezüglich jeder Ebene in der der Leiter liegt. Bei einer Spiegelung um eine Achse senkrecht zum Draht, ändert der Strom sein Vorzeichen. Dies könnte leicht zu der Annahme verführen, dass die Feldlinien des Magnetfelds radial nach außen zeigen müssen. Dies ist aber nicht der Fall, weil das Magnetfeld ein sogenannter Pseudovektor ist. Ein **Pseudovektor** ist eine vektorielle Größe die unter Punktspiegelung im Gegensatz zu regulären, polaren Vektoren unverändert bleibt. (Siehe S. 18) Ein Pseudovektor unterscheidet sich von einem Vektor dadurch, dass er bei einer Spiegelung zusätzlich sein Vorzeichen wechselt.

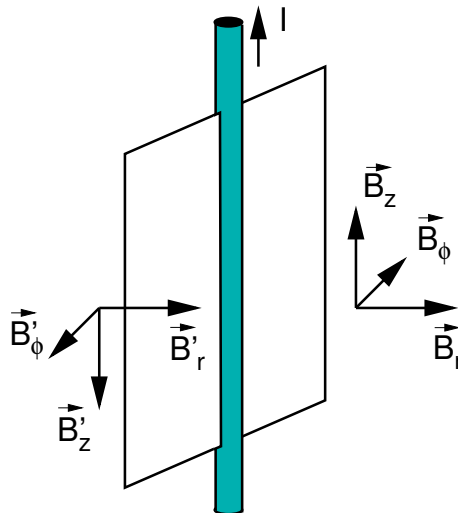


Abb. 3.7: Verhalten der magnetischen Felder unter Spiegelung. Als Pseudovektoren verhalten sie sich unter einer Spiegelung anders als normale Vektoren, indem sie zusätzlich ihr Vorzeichen ändern. Nur die Winkelkomponente  $B_\phi$  des Magnetfeldes ist auch mit der Drehsymmetrie eines Drahtes kompatibel.

Aufgrund der Zylindersymmetrie, erzeugt ein gerader, stromdurchflossener Draht ein Magnetfeld, dessen Feldlinien kreisförmig um den Leiter angeordnet sind. (Siehe Abb. 3.4.4). Um den Betrag der magnetischen Erregung als Funktion des Abstands vom Draht zu bestimmen, betrachten wir eine

Kreisfläche, die senkrecht auf dem Leiter steht.

$$I \stackrel{\text{Gl. 3.23}}{=} \int_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{H} = 2\pi|r||H|$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi|r|} \vec{e} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Dabei ist  $\vec{e}$  der Einheitsvektor in Richtung des Drahtes und parallel zur Stromdichte. Auf der rechten Seite haben wir auch die Richtungsinformation der magnetischen Erregung hinzugefügt.

Mit Hilfe der Zustandsgleichung, Gl. 3.6, erhalten wir das Magnetfeld.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{2\pi|r|} \vec{e} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

### Maxwellscher Verschiebestrom

Maxwell erkannte, dass die Maxwellgleichungen mit dem Ampereschen Gesetz ohne den Term  $\partial_t \vec{D}$  der Ladungserhaltung widersprechen. Um die Ladungserhaltung wieder herzustellen, hat er den Term  $\partial_t \vec{D}$  hinzugefügt.

Betrachten wir die beiden Teile des Ladungserhaltungssatzes Gl. 2.13 so erhalten wir mit Hilfe der Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &\stackrel{\text{Gl. 3.1}}{=} \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot (\partial_t \vec{D}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &\stackrel{\text{Gl. 3.4}}{=} \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \underbrace{\partial_t \vec{D}}_{=\vec{J}_V} \right] = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{=0} - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{D}}_{\partial_t \rho} \\ \Rightarrow \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \end{aligned}$$

Der Beitrag der magnetischen Erregung fällt heraus, weil für  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a})$  beliebige Vektorfelder  $\vec{a}(\vec{r})$  gilt. (Siehe Anhang C.) Ohne den Maxwellschen Verschiebungsstrom  $\vec{J}_V$  würde sich die elektrische Erregung in der Ladungserhaltung nicht herausheben. Damit wären die Maxwellgleichungen nicht mit der Ladungserhaltung vereinbar.

Die Gegenwart des Maxwellschen Verschiebungsstroms bedeutet, dass eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes ein Magnetfeld induziert. Amperes Gesetz mit Maxwellschen Verschiebungsstrom ähnelt dem Faradayschen Induktionsgesetz. In Abwesenheit von Ladungs- und Stromdichten, sowie bei konstanten Induktions- und Dielektrizitätskonstanten, besteht, bis auf ein Vorzeichen, eine Symmetrie zwischen  $\vec{E} \leftrightarrow c\vec{B}$ , wobei  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  die **Lichtgeschwindigkeit** ist. Darauf kommen wir aber noch zurück, wenn wir die Lichtausbreitung untersuchen.

## 3.5 Notationen

### 3.5.1 Gauß und SI systeme

Unseligerweise haben sich speziell in der Elektrodynamik nicht nur unterschiedliche Einheitensysteme eingebürgert, sondern auch unterschiedliche Definitionen der Grundgrößen. Das offiziell anerkannte System ist das SI oder MKSA<sup>4</sup> Einheitensystem. In vielen Textbüchern wird jedoch noch das Gaußsystem verwendet. In diesem Text verwende ich einheitlich das SI Einheitensystem. Der eine Grund für diese Wahl ist, dass es der offiziellen Schreibweise entspricht. Der andere ist, dass es ausführlicher ist. Es ist also einfacher, einen SI-Ausdruck in das Gaußsystem umzuwandeln als umgekehrt.

<sup>4</sup>MKSA steht für Meter-Kilogramm-Sekunde-Ampere

Die Umrechnung geschieht mit Hilfe der folgenden Formeln.

$$\begin{aligned} q^G &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} q^{SI} \\ \rho^G &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \rho^{SI} \\ \vec{j}^G &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{j}^{SI} \\ \vec{E}^G &= \sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{E}^{SI} \\ \vec{B}^G &= \underbrace{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}_{\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}} c \vec{B}^{SI} \end{aligned}$$

Dabei ist  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$  die Lichtgeschwindigkeit.

Im Gaußsystem haben die Maxwellgleichungen im Vakuum, d.h.  $\epsilon = \epsilon_0$  und  $\mu = \mu_0$ , die Form

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^G &= 4\pi\rho^G \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}^G + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B}^G &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^G &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}^G - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}^G &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}^G \end{aligned}$$

Die Dielektrizitätskonstante, bzw Induktionskonstanten tauchen hier nicht mehr auf. Es gibt also im Vakuum keine Unterscheidung zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und den entsprechenden Erregungen  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ .

Die Lorentzkraft hat die Form

$$\vec{F} = q^G \left( \vec{E}^G + \frac{v}{c} \times \vec{B}^G \right)$$

### 3.5.2 Aufteilung der Elektrodynamik

Die Maxwellgleichungen stellen ein komplexes System gekoppelter partieller Differentialgleichungen dar. Um sich einen Überblick über solche Systeme zu verschaffen, untersucht man Spezialfälle die sich einfacher analysieren lassen.

- Statischer Grenzfall: Wenn Ladungs- und Stromdichteverteilungen zeitlich konstant sind, kann man die Annahme machen, dass die Felder auch zeitunabhängig sind. Unter dieser Annahme zerfallen die Maxwellgleichungen in zwei entkoppelte Paare, welche einerseits die Elektrostatik und andererseits die Magnetostatik beschreiben. Deshalb wurden elektrische und magnetische Kräfte zunächst als grundlegend unterschiedliche Wechselwirkungen angesehen. Die Elektrodynamik ist das erste Beispiel einer Vereinheitlichung von zwei Grundkräften. Diese Vereinheitlichung von Kräften bildet noch immer das Modell für die Vereinheitlichung der Grundkräfte, was die Domäne der Elementarteilchenphysik ist.

- Elektrostatik: Das erste Paar der Maxwellgleichungen bestimmt im statischen Grenzfall,  $\partial_t \vec{E} = 0, \partial_t \vec{B} = 0, \partial_t \rho = 0, \partial_t \vec{j} = 0$ , die Elektrostatik.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

- Magnetostatik: Das zweite Paar von Maxwellgleichungen in der statischen Näherung ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \vec{j}$$

- Freie Felder: Homogene Differentialgleichungen sind einfacher zu lösen als inhomogene. Zudem kann zu jeder Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung immer eine beliebige homogene Lösung addiert werden, um die Randbedingungen zu erfüllen. Deshalb untersuchen wir die elektrischen und magnetischen Felder in der Abwesenheit von Ladungen und Strömen. Dies bildet die Grundlage der elektromagnetischen Strahlung, und damit der Optik.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = 0$$

- Elektrodynamik in der Materie: Zunächst werden wir uns weitgehend auf Phänomene im Vakuum beschränken. In Materialien werden durch externe Felder Ladungen verschoben und Ströme induziert. Diese zunächst komplexen Phänomene lassen sich jedoch wieder auf die Maxwellgleichungen abbilden, wenn man die Induktions- und Dielektrizitätskonstanten renormalisiert, das heißt, durch effektive Induktions- und Dielektrizitätskonstanten ersetzt. Spezielle Regeln müssen aber an den Grenzflächen zwischen unterschiedlichen Materialien berücksichtigt werden

## 3.6 Übungen

### 3.6.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Drahtes

Bestimme das elektrische Feld eines homogen geladenen Drahtes mit kreisförmigem Querschnitt und Durchmesser  $d$ .

### 3.6.2 Elektronenkanone

Die Elektronenkanone besteht aus einem Plattenkondensator mit der angelegten Spannung  $U$ . Auf der einen Platte sei eine Heizwendel angebracht, aus der Elektronen austreten können. Gegenüber sei in die andere Platte ein kleines Loch gebohrt, aus dem die Elektronen austreten können. Bestimme die Spannung die benötigt wird um die Elektronen auf ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen. Die Elektronen sollen nichtrelativistisch behandelt werden.

### 3.6.3 Hall Effekt

Betrachte Elektronen der Masse  $m_e$  und der Ladung  $e$ . Die Elektronen bewegen sich in einem Leiter der Seitenlänge  $d$ . Im Mittel werden die Ladungsträger nach einer Weglänge  $\ell$  in zufällige Richtungen gestreut. Entlang des Leiters wirkt ein externes elektrisches Feld und senkrecht dazu ein Magnetfeld. Bestimme den mittleren Strom durch den Leiter als Funktion des Magnetfeldes.

### 3.6.4 Massenspektrometer

### 3.6.5 Lichtmaschine

Bestimme die Spannung einer Lichtmaschine als Funktion der Zeit, die aus einer Leiterschleife mit der Fläche  $A$  besteht, die sich in einem homogenen Magnetfeld der Stärke  $\vec{B}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  dreht. Die Winkelgeschwindigkeit liege in der Ebene der Leiterschleife und das Magnetfeld stehe senkrecht auf der Drehachse.

### 3.6.6 Teilchen im homogenen Magnetfeld

## Chapter 4

# Vom Experiment zu den Maxwellgleichungen der Elektrostatik (4h)

In diesem Kapitel wird am Beispiel der Elektrostatik gezeigt, wie man ausgehend von experimentellen Beobachtungen zu den Maxwellgleichungen gelangen kann. Dabei werden einige Begriffsbildungen eingeführt, die notwendig sind, um zu der kompakten Form der Maxwellgleichungen zu gelangen. Die Konzepte der Theoriebildung, die hier entwickelt werden, lassen sich mehr oder weniger analog auf die anderen Gebiete der Elektrodynamik übertragen. Sie sind aber nicht nur auf die Elektrodynamik beschränkt. Ähnliche Gedankenschritte finden sich bei vielen anderen Theorien wieder.

Die Maxwellgleichungen der Elektrostatik, zu denen wir gelangen wollen, sind

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0\end{aligned}$$



Abb. 4.1: Charles Augustin de Coulomb, 1736-1806

Man erhält sie aus den Maxwellgleichungen Gl. 3.1-3.4 auf S. 25 indem man die einschränkende Annahme macht, dass Ladungen und Stromdichten, sowie die elektromagnetischen Felder zeitunabhängig sind. Unter dieser Annahme zerfallen die Maxwellgleichungen in die Gleichungen der Elektrostatik 3.1,3.3 und die der Magnetostatik 3.2,3.4. Dies war historisch auch der Grund warum man den magnetischen und elektrischen Wechselwirkungen als unabhängige Kräfte betrachtet hat.

### 4.1 Coulombgesetz

Der wichtigste experimentelle Befund der Elektrostatik ist das Coulombgesetz. Das Coulombgesetz sagt, dass geladene Teilchen Kräfte aufeinander ausüben. Diese Kräfte kann man entweder aus den Bahnkurven der Teilchen ermitteln, oder durch Messen der Kräfte, die notwendig sind, um die Ladungen an ihrem Ort zu stabilisieren.

Diese Kräfte haben folgende experimentell ermittelte Eigenschaften:

1. Sie sind proportional zum inversen Abstandsquadrat.
2. Sie wirken entlang der Verbindungsachse der Teilchen.

3. Die Kraft ist proportional zum Produkt der Ladungen der beiden Teilchen.
4. Die Kräfte sind additiv. (Superpositionsprinzip)

Diese Beobachtungen sind im **Coulombgesetz** zusammengefasst.

#### COULOMBGESETZ

Die Kraft, die ein geladenes Teilchen am Ort  $\vec{r}_2$  mit der Ladung  $q_2$  auf ein anderes geladenes Teilchen am Ort  $\vec{r}_1$  mit der Ladung  $q_1$  ausübt, ist

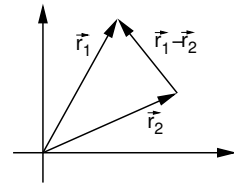
$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \underbrace{\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}_{\vec{e}} \quad (4.1)$$

Die Kraft ist anziehend, wenn die Ladungen entgegengesetztes Vorzeichen haben, und sie ist abstoßend, wenn die Ladungen das gleiche Vorzeichen haben. Der Ausdruck  $\vec{e}$  ist der Einheitsvektor der von vom zweiten zum ersten Teilchen zeigt.

## 4.2 Elektrisches Feld

Betrachten wir nun die Kraft, die eine Ansammlung von Punktladungen auf ein geladenes Teilchen mit der Ladung  $q_0$  am Ort  $\vec{r}_0$  ausübt. Da die Coulombkraft additiv ist, erhalten wir als Kraft  $\vec{F}_0$  auf das "nullte" Teilchen

$$\vec{F}_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{q_0 q_n}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_0 - \vec{r}_n|^2} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_n}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_n|}$$



Dies ist die Kraft, welche die Ladungen  $q_1, \dots, q_N$  auf die Ladung  $q_0$  ausüben.

Es ist hilfreich, die Ladung des Teilchens, auf welches die Kraft wirkt, auszuklammern und den Rest zu einer Größe, dem **elektrischen Feld**  $\vec{E}(\vec{r})$ , zusammenzufassen.

$$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}(\vec{r}_0) \quad (4.2)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n \neq 0} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_n|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \quad (4.3)$$

Die Hilfsgröße  $\vec{E}(\vec{r})$ , das elektrische Feld<sup>1</sup>, ist unabhängig von den Eigenschaften, Position und Ladung, des Teilchens, das die Kraft erfährt. Dies erlaubt es bei Kenntnis des elektrischen Feldes, die Bewegungsgleichung des 0-ten Teilchens für seine ganze Bahn zu bestimmen.

Die Einführung des elektrischen Feldes beschreibt den Übergang einer Beschreibung der Wechselwirkung als **Fernwirkung** zwischen zwei Ladungen zu einer Beschreibung der Wechselwirkung als **Nahwirkung** zwischen der Ladung und dem elektrischen Feld.

Im ersten Fall ist das elektrische Feld nur eine Hilfsgröße, während wir im zweiten Fall dem elektrischen Feld eine Art Realität zuordnen. In der Tat werden wir dem elektrischen Feld später eine Energie, einen Impuls und einen Drehimpuls zuordnen.

In der Quantenmechanik verschwimmt der Unterschied zwischen Teilchen und Feldern. Den elektromagnetischen Feldern werden Teilchen, sogenannte Photonen (Lichtteilchen), zugeordnet. Auf der anderen Seite werden Teilchen wie den Elektronen, Felder zugeordnet.

<sup>1</sup>Genau genommen ist es das Feld der übrigen Punktladungen  $q_1, \dots, q_n$



### 4.3 Das elektrostatische Potential

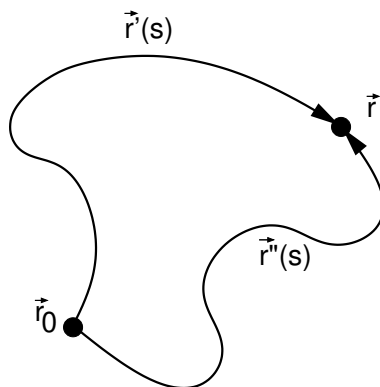
Eine weitere Vereinfachung erhält man dadurch, dass das elektrische Feld als Gradient eines skalaren Feldes dargestellt werden kann.

#### Existenz eines Potentials

Ein Vektorfeld kann immer dann als Gradientenfeld dargestellt werden, wenn das Bahnintegral von einem Ort zum anderen unabhängig von dem gewählten Pfad ist. Dann wird das Potential  $\Phi(\vec{r})$  bis auf eine Konstante  $\Phi_0$  eindeutig durch

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')$$

dargestellt. Das Vorzeichen wurde entsprechend der üblichen Konvention der Elektrodynamik gewählt. Damit das Integral unabhängig von dem gewählten Weg ist, muss das Bahnintegral über jeden geschlossenen Pfad verschwinden.<sup>2</sup>



Ein geschlossenes Bahnintegral kann mit dem Satz von Stokes in ein Integral der Rotation  $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})$  des Vektorfeldes über eine eingeschlossene Fläche  $A$  umgewandelt werden. Der Rand  $\partial A$  der eingeschlossenen Fläche ist gerade der Pfad.

$$0 = \oint_{\partial A} d\vec{r}' \cdot \vec{E}(\vec{r}') \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Damit dieses Integral für alle Flächen gilt, muss die Rotation überall verschwinden.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r}$$

Wir überprüfen ob das für das elektrische Feld einer Punktladungsverteilung diese Bedingung erfüllt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} \right] = 0$$

Die Rotation verschwindet wegen der folgenden Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (f(|\vec{r}|) \vec{r}) &= \underbrace{(\vec{\nabla} f(|\vec{r}|))}_{\frac{df}{d|\vec{r}|} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}} \times \vec{r} + f(|\vec{r}|) \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{r})}_{=0} \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|} \frac{df}{d|\vec{r}|} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{r})}_{=0} + f(|\vec{r}|) \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{r})}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Seien im  $\vec{r}^I(s)$  und  $\vec{r}^{II}(s)$  zwei unterschiedliche Pfade von  $\vec{r}_0$  nach  $\vec{r}_1$ , dann muss das geschlossene Bahnintegral, das wir erhalten, wenn wir den einen Pfad hin und den anderen zurückintegrieren, verschwinden, damit das Bahnintegral von  $\vec{r}_0$  nach  $\vec{r}$  wegunabhängig ist. Ein Vektorfeld  $\vec{E}(\vec{r})$  besitzt also genau dann ein Potential, wenn jedes geschlossene Bahnintegral über das Vektorfeld verschwindet.

Wir haben also gezeigt, dass ein Potential  $\Phi(\vec{r})$  existiert, dessen Gradientenfeld gerade das elektrische Feld ist, also  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ . Jetzt muss das Potential noch bestimmt werden.

### Bestimmung des Potentials

Wir werden die Form des Potentials nicht explizit ableiten<sup>3</sup>, sondern nur überprüfen, ob es die richtigen Eigenschaften hat.

#### ELEKTROSTATISCHES POTENTIAL

Das elektrostatische Potential  $\Phi(\vec{r})$  ist durch seinen Zusammenhang

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad (4.4)$$

mit dem elektrischen Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  definiert. Für eine statische Verteilung von Punktladungen  $q_n$  an den Positionen  $\vec{r}_n$  hat es die Form

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{n \neq 0} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_n|} \quad (4.5)$$

Beachte, dass die Relation Gl. 4.4 ausschließlich in der Elektrostatik gilt. Im allgemeinen gilt  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}$ , wobei  $\vec{A}$  das Vektorpotential ist, das wir später kennenlernen werden.

Wir überprüfen das Resultat Gl. 4.4 und Gl. 4.5.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = -\sum_{n \neq 0} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \\ &= -\sum_{n \neq 0} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^2} (\vec{\nabla}|\vec{r} - \vec{r}_n|) = \sum_{n \neq 0} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_n|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \end{aligned}$$

was, wie gewünscht, mit dem Ausdruck Gl. 4.3 übereinstimmt. In der Herleitung wurde der folgende Zusammenhang verwendet

$$\begin{aligned} \frac{d|\vec{r}|}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dx} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{|\vec{r}|} \\ \Rightarrow \vec{\nabla}|\vec{r}| &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Für die Ableitung bestimmt man zuerst das Potential einer Punktladung indem man den Integrationsweg in zwei Teile unterteilt: Ein Wegsegment, das radial auf die Punktladung zu oder von ihr weg führt und ein zweites Wegsegment, das den Abstand von der Punktladung nicht verändert. Da das elektrische Feld radial nach außen zeigt, verschwindet das Integral des zweiten Segments heraus, während sich das erste einfach integrieren lässt. Anschließend nutzt man das Superpositionsprinzip, um die Potentiale mehrerer Punktladungen zu einem Gesamtpotential zu überlagern.

### Potential einer Ladungsdichteverteilung

Das Potential, das durch eine Ladungsdichte erzeugt wird erhalten wir gemäß

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}) &= \sum_{n \neq 0} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_n|} \\
 &= \int d^3r' \sum_{n \neq 0} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_n) \\
 &= \int d^3r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\sum_{n \neq 0} q_n \delta(\vec{r}' - \vec{r}_n)}_{\rho(\vec{r})}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Damit erhalten wir das

#### POTENTIAL EINER LADUNGSDICHTEVERTEILUNG

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{4.7}$$

## 4.4 Poissongleichung

Um unseren Weg zu den Maxwellgleichungen zu bahnen, suchen wir nun eine Differentialgleichung für das elektrostatische Potential. Dazu verwenden wir eine nützliche Beziehung die in Anhang E.0.1 hergeleitet wird.

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}) &\stackrel{\text{Gl. 4.7}}{=} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \\
 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')} \\
 &= \frac{-1}{\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{-\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die

#### POISSONGLEICHUNG

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \tag{4.8}$$

Die Poissongleichung hat einen wichtigen Vorteil gegenüber dem Integralausdruck, aus dem sie hergeleitet wurde. Wir müssen nun nicht mehr die Ladungsdichte im gesamten Universum kennen, um das Potential an einem Ort zu bestimmen. Stattdessen genügt es, die Ladungen in einem bestimmten Bereich und die Randbedingungen des Potentials auf der Oberfläche des Bereichs zu kennen. Randbedingungen bilden die Grundlage der Potentialtheorie und werden im Kapitel 5 ausführlich behandelt.

## 4.5 Maxwellgleichungen der Elektrostatik

Den Satz von Gauß erhalten wir, indem wir in der Poissongleichung das Potential durch das elektrische Feld ersetzen.

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \underbrace{\vec{D}}_{\epsilon_0 \vec{E}} = \rho$$

Beachte hier, dass wir angenommen haben, dass  $\epsilon_0$  räumlich konstant ist.

Als zweite Maxwellgleichung bestimmen wir die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})\Phi = 0$$

Wir sehen, dass der letzte Term verschwindet, weil das Kreuzprodukt beim Vertauschen sein Vorzeichen ändert, aber gleichzeitig in sich selber übergeht. Man kann auch die Komponenten von  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}$  ausschreiben, um zu sehen, dass dieser Ausdruck gleich Null ist.

Wir erhalten also

$$\vec{\nabla} \vec{D} = \rho \quad (4.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (4.10)$$

Dies sind genau die ersten beiden Maxwellgleichungen, wenn wir alle Zeitableitungen weglassen. Die beiden letzten Maxwellgleichungen sind im statischen Grenzfall vollständig entkoppelt, und bilden die Basis der Magnetostatik.

## Chapter 5

# Potentialtheorie am Beispiel der Elektrostatik (11h)

In diesem Kapitel zeigen wir einige Methoden, um mit Feldern zu rechnen. Im Grunde lernen wir Ansätze zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Deshalb ist das hier Gelernte enorm wichtig für alle Gebiete der Theoretischen Physik, bei denen mit Feldern hantiert wird. Wir werden das hier vermittelte später in modifizierter Form zum Beispiel in der Magnetostatik, der Optik, der Quantenmechanik und der statistischen Physik etc wiederfinden.



### 5.1 Energie einer Ladungsverteilung

#### 5.1.1 Adiabatische Verschiebung

Energien können immer auf die Arbeit zurückgeführt werden, die an einem System verrichtet werden muss, um sie von einem Zustand in einen anderen überzuführen.

Die Arbeit, die an einem System verrichtet wird, erhält man als Kraft mal Weg. Den zurückgelegten Weg kann man einfach messen. Die externe Kraft koppeln wir über Federn an das System, sodass wir die angreifenden Kräfte anhand der Längenänderung der Federn bestimmen können. Jede Energiemessung lässt sich im Endeffekt auf eine solche mechanische Messung zurückführen.

Bei der Messung können allerdings Trägheitskräfte im System und im Messapparat auftreten, und es kann Energie in Form von Wärme an die Umgebung verloren gehen. Beides verfälscht die Messung. Aus diesem Grund führt man die Messung **quasistationär** durch. Ein quasistationären Prozess ist hinreichend langsam, dass Trägheitskräfte keine Rolle spielen und das System ständig im Gleichgewicht bleibt.

Ein nützliches Prinzip, um den Energieunterschied zu bestimmen, ist das der **adiabatischen Verschiebung**. Insbesondere wird das Prinzip der adiabatischen Verschiebung in der Thermodynamik eine besondere Bedeutung erhalten. Ein weiterer Grund dieses Prinzip hier im Detail auszuführen, ist, dass man sich bei der Bestimmung der Arbeit leicht mit den Vorzeichen vertun kann.

Um einen quasistationären Prozess zu verwirklichen **quasistationären Prozess**, wenden wir externe Kräfte auf das System an, welche die internen Kräfte ausgleichen, sodass das System immer in Ruhe ist. Wir lassen also externe Kräfte auf das System einwirken, welche die internen Kräfte exakt ausgleichen. Das System ist genau dann in Ruhe, wenn  $\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} = 0$ . Das bedeutet, dass wir von den externen Kräften auf die internen Kräfte zurückschließen können.

Abb. 5.1: Simeon Denis Poisson, 1781-1840

Verschieben wir nun das System, dann muss dazu keine zusätzliche Arbeit verrichtet werden, da das System ja kräftefrei ist. Die Verschiebung erfolgt so langsam, dass die Reibungs- und Beschleunigungskräfte vernachlässigbar klein sind. Die gesamte verrichtete Arbeit verschwindet also

$$\Delta W = \Delta W_{\text{ext}} + \Delta W_{\text{int}} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r} \left( \vec{F}_{\text{ext}}(\vec{r}) + \vec{F}_{\text{int}}(\vec{r}) \right) = 0$$

Die externe Kraft wird an jedem Ort der Bahn bestimmt, sodass wir den Unterschied der potentiellen Energie aus der durch die externe Kraft am System verrichteten Arbeit bestimmen können.

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{ext}} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r} \vec{F}_{\text{ext}}(\vec{r}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r} \vec{F}_{\text{int}}(\vec{r}) \\ &= - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r} \underbrace{\left( -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}(\vec{r}) \right)}_{\vec{F}_{\text{int}}} = E_{\text{pot}}(\vec{b}) - E_{\text{pot}}(\vec{a}) \end{aligned}$$

### 5.1.2 Selbstenergie von Punktladungen

Wir wollen nun die Selbstenergie einer Ansammlung von Punktladungen bestimmen. Abb. 5.2 ist für die nun folgende Diskussion hilfreich. Wir beginnen mit einem Referenzzustand, bei dem alle Ladungen unendlich weit voneinander entfernt sind, sodass sie nicht mehr miteinander wechselwirken. Die Energie dieses Zustands ist die Summe der Energien  $E_i$  der einzelnen Punktladungen. Nun bringen wir eine Ladung nach der anderen aus dem Unendlichen an seinen Zielort und bestimmen die dabei aufgewandte Arbeit.

- Die erste Ladung erfährt keine Kräfte, während sie an ihren Zielort gebracht wird, sodass keine Arbeit verrichtet wird. Die Energie dieses Systems mit einer Ladung am Zielort und den anderen im Unendlichen ist also gleich der Referenzenergie,

$$E(\vec{r}_1) = \sum_i E_i,$$

da die Ladungen immer noch immer unendlich weit voneinander entfernt sind.

- Um die zweite Ladung an ihren Ort  $\vec{r}_2$  zu verschieben, muss Arbeit aufgewandt werden, da sie nun in die Nähe der ersten gelangt, sodass Kräfte zwischen den beiden Ladungen wirken.

$$E(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E(\vec{r}_1, \infty) + \underbrace{\int_{\infty}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \vec{F}_{\text{ext}}}_{\text{Arbeit}}$$

Dabei ist  $E(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  die Energie mit beiden Ladungen am Zielort und  $E(\vec{r}_1, \infty)$  die Energie mit der ersten Ladung am Zielort und der zweiten Ladung im Unendlichen. Die Kraft  $\vec{F}_{\text{ext}}$  muss von außen angewandt werden, um die interne Kraft  $\vec{F}_{\text{int}} = q_2 \vec{E}(\vec{r}) = -q_2 \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|}$  zwischen den Teilchen auszugleichen, d.h.  $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{int}}$ .

$$\begin{aligned} E(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= E(\vec{r}_1, \infty) - \underbrace{\int_{\infty}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \left( -\vec{\nabla} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} \right)}_{\substack{\vec{F}_{\text{int}} \\ \text{Am System verrichtete Arbeit}}} \\ &= \sum_i E_i + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \end{aligned}$$

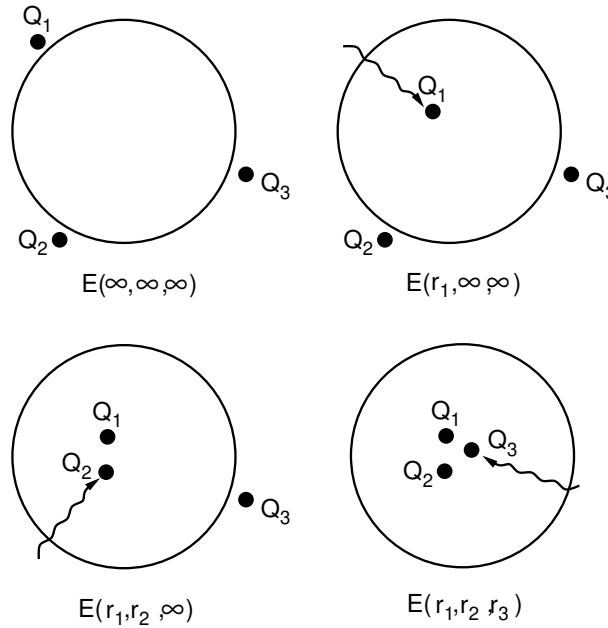


Abb. 5.2: Illustration der Selbstenergie. Der Kreis stellt das Universum mit unendlichem Radius dar. Die drei Ladungen sind zunächst im Unendlichen und außerdem unendlich weit voneinander entfernt. Deshalb verschwindet die Selbstenergie  $E(\infty, \infty, \infty)$  im ersten Zustand oben links. Von der Selbstenergie der isolierten Punktladungen wird abgesehen. Um die erste Ladung, wie oben rechts dargestellt, an ihre endgültige Position  $\vec{r}_1$  zu bringen, muss noch keine Arbeit verrichtet werden, da auf dem Weg dorthin noch keine Kräfte wirken. Die Energie  $E(\vec{r}_1, \infty, \infty)$  ist also auch Null. Um, wie unten links dargestellt, die zweite Ladung an ihren endgültigen Ort  $\vec{r}_2$  zu bringen muss Arbeit verrichtet werden, um sie gegen die von der ersten Ladung verursachten Kraft  $\vec{F}_1(\vec{r})$  zu verschieben. Wir erhalten  $E(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \infty) = -\int_{\infty}^{\vec{r}_2} d\vec{r} F_1(\vec{r})$ . Entsprechend erhalten wir die Selbstenergie der drei Ladungen aus  $E(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \infty)$  durch Berücksichtigung der Arbeit, die gegen die von den ersten beiden Ladungen verursachten Kräfte verrichtet werden muss, nämlich  $E(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = E(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \infty) - \int_{\infty}^{\vec{r}_3} d\vec{r} (\vec{F}_1(\vec{r}) + \vec{F}_2(\vec{r}))$

- Entsprechend bringen wir die weiteren Ladungen an ihren Ort

$$E(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \sum_i E_i + \sum_{\substack{i,j \\ j>i}}^n \frac{q_i, q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}}^n \frac{q_i, q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

## SELBSTENERGIE EINES SYSTEMS VON PUNKTLADUNGEN

Die Selbstenergie eines Systems von Punktladungen ist daher

$$E_{\text{Selbst}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \sum_i E_i \quad (5.1)$$

Im Allgemeinen werden die Selbstenergien  $E_i$  der isolierten Punktladungen per Konvention gleich Null gesetzt. Dies ist erlaubt, weil die Energie selbst nicht beobachtbar ist, sondern nur Energieunterschiede und Energiegradienten. Wir werden gleich sehen, dass die Selbstenergie einer isolierten Punktladung unendlich ist. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  kommt daher, dass jedes Paar von Ladungen in der Summe zweimal mitgezählt wird.

### 5.1.3 Selbstenergie einer Ladungsdichte

Nun wollen wir die Selbstenergie einer Ladungsdichteverteilung anstelle von einem Punktladungssystem bestimmen. Dazu ersetzen wir die Punktladungen durch ihre Ladungsdichten  $\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$  und erhalten dadurch die Selbstenergie einer Ladungsverteilung. Anschließend abstrahieren wir von Punktladungsverteilungen, indem wir ausnützen, dass sich jede Ladungsdichte als Grenzfall von sehr dichten Punktladungsverteilungen darstellen lässt.

Wir gehen also von der Selbstenergie einer Punktladungsverteilung Gl. 5.1 aus.

$$\begin{aligned} E_{\text{Selbst}} &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \underbrace{\int d^3r \int d^3r' \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j)}_{=1} + \sum_i E_i \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \sum_{i \neq j}^n q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) q_j \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j) + \sum_i E_i \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\left[ \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right]}_{\rho(\vec{r})} \underbrace{\left[ \sum_j q_j \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j) \right]}_{\rho(\vec{r}')} \\ &\quad - \sum_i \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{[q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)]}_{\rho_i(\vec{r})} \underbrace{[q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)]}_{\rho_i(\vec{r}')} + \sum_i E_i \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} - \sum_i \left[ \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_i(\vec{r}) \rho_i(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} - E_i \right] \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Ladungsdichten individueller Punktladungen als  $\rho_i(\vec{r})$  bezeichnet. Beachte, dass beide Doppelintegrale für Punktladungsdichten unendlich werden. Dies rührt daher, dass die Selbstenergie einer einzelnen Ladungsdichte unendlich ist. Das Problem wird konzeptionell so umgangen, dass die Punktladung nur eine Idealisierung einer beliebig stark lokalisierten Ladungsverteilung ist. Für ausgedehnte Ladungsdichten sind die Doppelintegrale wohl definiert.

Um die Gleichung zu vereinfachen, treffen wir für Ladungsdichten eine andere Wahl für die Referenzenergien  $E_i$  als bei den Punktladungen, nämlich

$$E_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_i(\vec{r}) \rho_i(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.2)$$

Mit dieser Wahl erhalten wir die



## SELBSTENERGIE EINER LADUNGSVERTEILUNG

$$E_{\text{Selbst}} = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (5.3)$$

Nun kommen wir nochmals auf die Terme  $E_i$  in Gl. 5.1 zurück. Diese sind gerade die Selbstenergien der einzelnen Punktladungen. Solange wir die Integrität der Punktladungen nicht antasten, bleiben diese Terme konstant. In solchen Fällen ist eine andere Konvention als Gl. 5.2 für die Referenzenergie sinnvoll, nämlich  $E_i = 0$ . Es ist allerdings zu beachten, dass der Ausdruck Gl. 5.3 nicht mit Gl. 5.1 identisch ist, wenn in der letzteren die Konvention  $E_i = 0$  gewählt wird.

### 5.1.4 Energie des Potentials oder des elektrischen Feldes

Die Selbstenergie einer Ladungsdichte Gl. 5.3 kann auf unterschiedliche Weisen geschrieben werden:

- Wir ersetzen eine Ladungsdichte durch das Potential

$$\begin{aligned} E_{\text{selbst}} &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \underbrace{\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\Phi(\vec{r})} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) \end{aligned}$$

- Nun können wir die Ladungsdichte mittels der Poissongleichung auch alleine durch das Potential ausdrücken

$$\begin{aligned} E_{\text{selbst}} &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r (\epsilon_0 \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r})) \Phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \Phi(\vec{r}) \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Dieser Term hat große Ähnlichkeit mit dem quantenmechanischen Ausdruck für die kinetischen Energie von Teilchen,  $E_{\text{kin}} = \int d^3r \Psi^*(\vec{r}) \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r})$ .

- Schließlich können wir die Selbstenergie durch das elektrostatische Feld ausdrücken, indem wir einen Gradienten mittels partieller Integration verschieben.

$$\begin{aligned} E_{\text{selbst}} &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \Phi(\vec{r}) \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\int d^3r \vec{\nabla} \cdot (\Phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}))}_{=0 \text{ wenn } \Phi(\infty)=0} + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{E} \cdot \vec{D} \end{aligned}$$

Beachte nun, dass das elektrische Feld nun eine Energie trägt und damit sozusagen Substanz annimmt. Beachte, dass das elektrische Feld zunächst als reine Hilfsgröße eingeführt wurde.

Der letzte Ausdruck zeigt deutlich, dass die Selbstenergie des elektrischen Feldes nur positiv sein kann, da das elektrische Feld quadratisch eingeht.

Zusammenfassend stellen wir die unterschiedlichen Formen der Selbstenergie zusammen:

$$\begin{aligned} E_{\text{selbst}} &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \Phi(\vec{r})\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{E}\vec{D} \end{aligned}$$

## 5.2 Randbedingungen

Das Grundproblem der Potentialtheorie ist es, das Potential aus der Poissongleichung zu bestimmen. Dabei erlernen wir die wichtigsten Methoden im Umgang mit partiellen Differentialgleichungen. Die Poissongleichung ist hier ein Beispiel für eine Differentialgleichung, die trotz ihrer Einfachheit, die wesentlichen Elemente der üblichen Differentialgleichungen enthält.

Das Problem ist also wie folgt definiert: Gegeben ist eine Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  und die Poissongleichung

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

Das Potential  $\Phi(\vec{r})$  soll bestimmt werden.

Die Lösung der Differentialgleichung ist nicht eindeutig, wie im Folgenden gezeigt wird:

1. Es sei  $\Phi_{inh}$  eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, der Poissongleichung.
2. Nun bestimmen wir eine Lösung der homogenen Poissongleichung, der Laplacegleichung.

### LAPLACEGLEICHUNG

$$\vec{\nabla}^2\Phi_h(\vec{r}) = 0$$

Multiplizieren wir die Lösung der Laplacegleichung mit einem Faktor, dann erhalten wir eine weitere Lösung der Laplacegleichung. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft homogener linearer Differentialgleichungen.

**Multiplizieren wir eine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit einem Faktor, dann erhalten wir wieder eine Lösung der Differentialgleichung.**

3. Durch Einsetzen in die Poissongleichung sehen wir, dass auch  $\Phi_{inh} + c\Phi_{hom}$  die Poissongleichung löst, wobei  $c$  eine beliebige Konstante ist.

$$\vec{\nabla}^2(\Phi_{inh} + c\Phi_h) = \underbrace{\vec{\nabla}^2\Phi_{inh}}_{\rho/\epsilon_0} + c \underbrace{\vec{\nabla}^2\Phi_h}_{=0} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

**Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist die Superposition einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und einer allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung.**

Wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann, sind einige der Lösungen der Laplacegleichung von der Form.

$$\Phi_{hom}(\vec{r}) = c_0 + \vec{c}_1\vec{r} + \dots$$

Beachte aber, dass nicht jede Potenzreihenentwicklung die Laplacegleichung löst. Weitere Lösungen der Laplacegleichungen werden wir im Folgenden kennen lernen.

Wie bestimmt man die Lösung der Poissongleichung eindeutig? Das Potential ist eindeutig bestimmt durch

- die Poissongleichung und
- die Randbedingungen

festgelegt.

Dies ist ganz analog zu gewöhnlichen Differentialgleichungen<sup>1</sup>. Auch hier mussten wir die Anfangsbedingungen oder Randbedingungen festlegen, um eine Bahn eindeutig zu bestimmen. Bei einer Differentialgleichung der Ordnung  $n$  gab es  $n$  freie Parameter für jede Dimension der Lösung. Deshalb haben wir in der bei den Newtonschen Bewegungsgleichungen Startpositionen und Anfangsgeschwindigkeiten festgelegt, oder wie im Lagrangeformalismus Start- und Endpositionen.

Ganz ähnlich haben wir es bei der Poissongleichung mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun. Deshalb muss man einen Wert am Rand eines geschlossenen Bereichs festlegen. Alternativ könnte man auch Wert und Gradient am Rand eines offenen Bereichs festlegen.

#### RANDBEDINGUNGEN

Zwei Arten von Randbedingungen haben einen Namen erhalten, nämlich die Dirichlettschen Randbedingungen und die Neumannschen Randbedingungen.

- **Dirichlettsche Randbedingungen:** Vorgabe des Potentials auf der Oberfläche eines geschlossenen Bereichs
- **Neumannsche Randbedingungen:** Vorgabe der Normalkomponente des elektrischen Feldes auf der Oberfläche eines geschlossenen Bereichs. (Neumannsche Randbedingungen legen das Potential nur bis auf einen konstanten Term fest. Dennoch ist das elektrische Feld eindeutig bestimmt.)

Nun wollen wir mittels eines Widerspruchsbeweises zeigen, dass diese beiden Randbedingungen die Lösung eindeutig festlegen. Die zu beweisende Aussage ist:

Zwei Potentiale  $\Phi_1(\vec{r})$  und  $\Phi_2(\vec{r})$ , welche

1. die Poissongleichung für dieselbe Ladungsdichte erfüllen
2. am Rand  $\partial\Omega$  eines Bereichs  $\Omega$  entweder beide
  - denselben Wert oder
  - dieselbe Normalkomponente des Gradienten

besitzen

sind entweder identisch oder unterscheiden sich durch eine Konstante.

Beweis: Es sei  $U(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_1(\vec{r}) - \Phi_2(\vec{r})$  die Differenz der Potentiale.

- Zunächst zeigen wir mit Hilfe der 1. Bedingung, dass  $U$  die Laplacegleichung löst

$$\vec{\nabla}^2 U(\vec{r}) = \vec{\nabla}^2 \Phi_1(\vec{r}) - \vec{\nabla}^2 \Phi_2(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

- Nun zeigen mit Hilfe der 2. Bedingung, dass auf dem Rand des Gebiets  $\vec{n}U\vec{\nabla}U = 0$  gilt, wobei  $\vec{n}$  der jeweilige Normalenvektor auf der Oberfläche von  $\Omega$  mit der Länge eins ist. Auf der Oberfläche  $\partial\Omega$  des Gebiets gilt entweder

$$U(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r}) - \Phi_2(\vec{r}) = 0$$

<sup>1</sup>Eine Differentialgleichung heißt gewöhnlich, wenn seine Lösungen von einem einzigen Parameter abhängen. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik sind Beispiele für gewöhnliche Differentialgleichungen.

oder

$$\vec{n} \vec{\nabla} U(\vec{r}) = \vec{n} \vec{\nabla} \Phi_1(\vec{r}) - \vec{n} \vec{\nabla} \Phi_2(\vec{r}) = 0$$

Verschwindet einer der Terme, dann verschwindet auch das Produkt, sodass

$$\vec{n} U \vec{\nabla} U = 0$$

- Nun betrachten wir das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d^3r (\vec{\nabla} U)^2 &= \int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} (U \vec{\nabla} U) - \int_{\Omega} d^3r \underbrace{\left( U \vec{\nabla}^2 U \right)}_{=0} \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} d\vec{A} (U \vec{\nabla} U) \stackrel{\text{Randbed.}}{=} 0 \end{aligned}$$

Da  $(\vec{\nabla} U)^2$  größer oder gleich Null ist, kann das Integral

$$\int_{\Omega} d^3r (\vec{\nabla} U)^2$$

nur verschwinden, wenn der Gradient von  $U$ ,  $\vec{\nabla} U$ , im ganzen Bereich  $\Omega$  verschwindet.

Wegen  $\vec{\nabla} U = 0$  in  $\Omega$  muss  $U$  konstant sein. Da  $U$  die Differenz der beiden Potentiale ist, müssen die beiden Potentiale bis auf eine Konstante identisch sein. *q.e.d.*

### 5.3 Quasi eindimensionale Probleme

Nach der Einführung in die Potentialtheorie werden wir im Folgenden einige der wichtigsten Problemlösungsstrategien kennenlernen.

Eindimensionale Probleme lassen sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen und sind durch Integration lösbar. Bei eindimensionalen Problemen hängt die Ladungsdichte nur von einem einzigen Parameter ab. Obwohl eindimensionale Probleme nur eine spezielle Problemklasse darstellen, spielen sie eine bedeutende Rolle in der Technologie, weil technologische Bauteile aus möglichst einfachen Strukturen aufgebaut werden. Randeffekte werden nur bei starker Miniaturisierung der Strukturen wichtig und können in vielen Fällen vernachlässigt werden. Unter die Klasse eindimensionaler Probleme fällt zum Beispiel der Plattenkondensator.

Wir betrachten eine Ladungsdichte, die nur in  $z$ -Richtung variiert, also

$$\rho(\vec{r}) = \rho(z).$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu erhalten wählen wir den Ansatz

$$\Phi_{inh}(\vec{r}) = \Phi_{inh}(z).$$

Wir verlangen also, dass die spezielle Lösung auch nur von der  $z$ -Koordinate abhängt. Da wir nur eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL benötigen, ist die Einschränkung des Ansatzes unerheblich.

Damit kann die Poissongleichung auf eine gewöhnliche DGL abgebildet werden.

$$\vec{\nabla}^2 \Phi_{inh}(\vec{r}) = \partial_z^2 \Phi_{inh}(z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(z)$$

Die Lösung erhält man durch Integration

$$\begin{aligned} \Phi_{inh}(z) &= \Phi_{inh}(0) + \int_0^z dz' \partial_z|_{z'} \Phi_{inh} \\ &= \Phi_{inh}(0) + \int_0^z dz' \left( \partial_z|_0 \Phi_{inh} + \int_0^{z'} dz'' \partial_z^2|_{z''} \Phi_{inh} \right) \\ &\stackrel{\text{Poissongl.}}{=} \underbrace{\Phi_{inh}(0) + z \partial_z|_0 \Phi_{inh}}_{\text{Lösung der Laplacegl.}} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \rho(z'') \end{aligned}$$

Für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL, können wir die ersten beiden Terme weglassen. Sie sind Lösungen der Laplacegleichung. Als Lösungen der homogenen Differentialgleichung können wir solche Terme in der speziellen Lösung der inhomogenen DGL beliebig addieren und subtrahieren.

Um die Allgemeine Lösung zu erhalten, müssen wir die allgemeine Lösung  $\Phi_{hom}$  der Laplacegleichung addieren.

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \rho(z'') + \Phi_{hom}(\vec{r})$$

Da eine Lösung der Laplacegleichung in alle Raumrichtungen ändern kann, gilt dies nun auch für die Lösung der Poissongleichung, obwohl sich die Ladungsdichte nur in einer Richtung ändert. Zum Beispiel kann man in einem Plattenkondensator auch ein externes Feld parallel zum Plattenkondensator überlagern.

Besonders einfach wird die Bestimmung der speziellen Lösung, wenn die Ladungsdichten stückweise konstant sind. Dann kann das Potential aus Parabeln zusammengesetzt werden, deren Krümmung durch die jeweilige Ladungsdichte festgelegt ist. Die Parabeln werden dann so zusammengesetzt, dass sie mit Wert und Ableitung an den Stufen der Ladungsdichte übereinstimmen.

### 5.3.1 Beispiel Plattenkondensator

Wir betrachten zwei geladene Platten im Abstand  $d$ . Die eine Platte wird durch eine Flächenladungsdichte  $\sigma_1$  in der  $x-y$ -Ebene bei  $z=0$  beschrieben. Die andere durch eine Flächenladungsdichte  $\sigma_2$  bei  $z=d$ . Eine **Flächenladungsdichte** ist die Ladung pro Fläche  $\sigma = \frac{Q}{A}$

Zunächst stellen wir die Ladungsdichte dar:

$$\rho(r) = \sigma_1 \delta(z) + \sigma_2 \delta(z-d)$$

Anschließend integrieren wir die Poissongleichung Schritt für Schritt<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \Phi &= -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0} = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \delta(z) - \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \delta(z-d) \\ \partial_z|_z \Phi(z) &= \int_{-\infty}^z dz' \partial_z^2 \Phi = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \theta(z) - \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \theta(z-d) \\ \Phi(z) &= \int_{-\infty}^z dz' \partial_z' \Phi(z') = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} z \theta(z) - \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} (z-d) \theta(z-d) \\ &= [\theta(z) - \theta(z-d)] \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} z + \theta(z-d) \left[ \frac{\sigma_1 d}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{\epsilon_0} (z-d) \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} z & \text{für } 0 < z < d \\ -\frac{\sigma_1 d}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\epsilon_0} (z-d) & \text{für } d < z \end{cases} \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den interessanten Fall, dass die Gesamtladung des Kondensators verschwindet, d.h.  $\sigma_1 = -\sigma_2 = -QA$ , wobei  $Q$  die Ladung auf der zweiten Platte und  $A$  die Fläche einer Platte ist. Wir machen die zusätzliche Annahme, dass keine äußeren elektrischen Felder auf den Plattenkondensator wirken.

- Das elektrische Feld im Innern des Kondensators ist

$$E_z = \sigma_1 / \epsilon_0 = -\frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Das elektrische Feld zeigt von der positiv geladenen zur negativ geladenen Platte.

<sup>2</sup>Wir nutzen die Heavisidefunktion  $\theta(x)$ , definiert durch  $\theta(x < 0) = 0$ ,  $\theta(x = 0) = \frac{1}{2}$  und  $\theta(x > 0) = 1$ . Beachte, dass  $\theta(x) = \int_{-\infty}^x dx' \delta(x')$ .

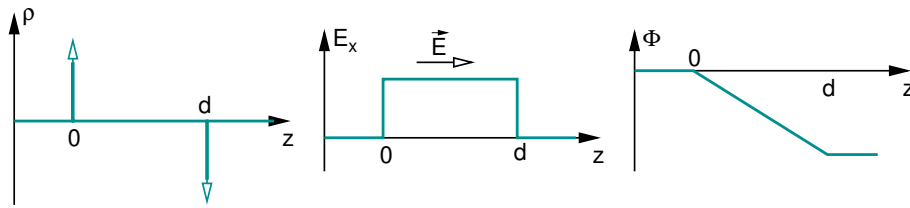


Abb. 5.3: Ladungsdichte, elektrisches Feld und Potentialverlauf im Plattenkondensator mit entgegengesetzten Ladungen. Beachte, dass das elektrische Feld und das Potential nur spezielle Lösungen der Differentialgleichungen sind.

- Außerhalb des Kondensators ist das Potential konstant und das elektrische Feld verschwindet.
- das Potential macht eine Stufe (von der einen Seite  $z < 0$  auf die andere Seite  $z > d$  des Kondensators) der Höhe

$$\Delta\Phi = -\frac{\sigma_1 d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$$

Der Sprung des Potentials entspricht der angelegten Spannung  $U = \Delta\Phi$

$$U = \frac{d}{A\epsilon_0} Q = \frac{Q}{C} \quad (5.4)$$

Man kann also aus der Spannung  $U$  die Ladung auf dem Kondensator bestimmen. Die Größe  $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$  ist die Kapazität des Plattenkondensators.

#### Definition 5.1 KAPAZITÄT

Die Kapazität gibt also die Ladung an, die pro angelegter Spannung im Kondensator gespeichert wird.

$$Q = CU \quad (5.5)$$

Die Kapazität eines Plattenkondensators mit der Fläche  $A$  und dem Plattenabstand  $d$  ist

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \quad (5.6)$$

**Editor:** Der Ursprung des  $\epsilon_r$  ist hier nicht erklärt.

## 5.4 Methode der Bildladungen

Die Methode der Bildladungen ist ein Beispiel für eine etwas unübliche Technik in der theoretischen Physik: Man geht von einer Lösung aus und sucht sich dafür ein Problem. Speziell ist die Methode der Bildladungen auf metallische und dielektrische Oberflächen mit einer einfachen Form anwendbar.

Zunächst betrachten wir einen Leiter. Ein **idealer Leiter** ist ein Modell eines Metalls, bei dem die Elektronen frei verschiebbar sind. Das elektrische Feld in einem Leiter verschwindet, wenn das System im Gleichgewicht ist. Andernfalls würden Kräfte auf die Ladungen wirken und diese verschieben. Also ist das elektrostatische Potential in einem Leiter konstant. An der Oberfläche ist das Potential stetig, weist aber im allgemeinen einen Sprung in der Ableitung auf. Der Sprung in der Ableitung wird durch Oberflächenladungen verursacht.

## IDEALER LEITER

In einem idealen Leiter sind die Ladungen beliebig verschiebbar. Es wirken also keine Kräfte auf die Ladungen im Innern eines idealen Leiters, d.h.  $\vec{F} = q\vec{E} = 0$ . Dashalb gilt im Innern eines idealen Leiters

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \Phi(\vec{r}) = \text{konst.}$$

Ist das Potential im Leiter konstant, dann verschwindet auch die Parallelkomponente des elektrischen Feldes auf der Oberfläche, da sich ja sonst das Potential entlang der Oberfläche ändern würde. Die Feldlinien stehen also senkrecht auf der Oberfläche eines idealen Leiters.

Nun untersuchen wir das Potential einer Ladung vor einer ebenen Oberfläche eines idealen Leiters. Ein praktisches Anwendungsbeispiel ist die Bestimmung der Austrittsarbeit eines Elektrons, wenn es aufgrund einer optischen Anregung oder eines angelegten elektrischen Feldes aus der Oberfläche des Material austritt. Dieses Problem tritt im Rastertunnelmikroskop, bei Photoemmissionsexperimenten, beim Feldionenemikroskop. Es spielt auch beim Elektronentransport an Metall-Halbleitergrenzflächen eine wichtige Rolle.

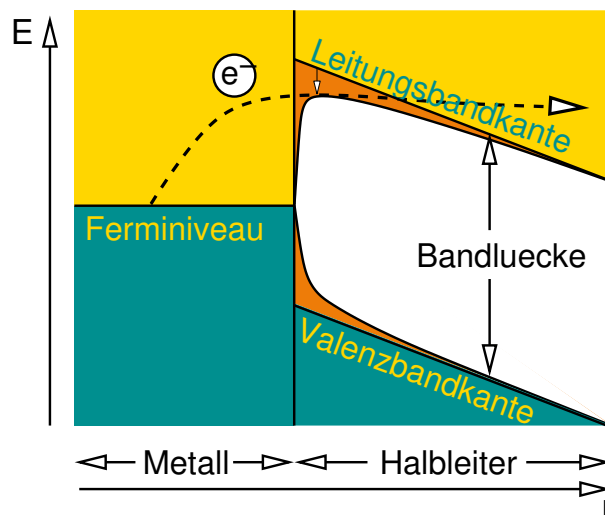


Abb. 5.4: Schematische Darstellung der Zustände an einer Metall-Halbleiter Grenzfläche. Die Metall-Halbleiter Grenzfläche bildet eine Diode, also einen Gleichrichter. Die mit Elektronen besetzten Zustände sind blau und die unbesetzten Zustände sind gelb eingezeichnet. In der Bandlücke des Halbleiters gibt es keine ausgedehnten Zustände. Leitungselektronen, die in den Halbleiter eindringen, müssen eine Barriere überwinden, um in das Leitungsband des Halbleiters zu gelangen. Diese Energie muss durch thermische Energie zu Verfügung gestellt werden. Der Strom ist proportional zu  $e^{-\Phi/k_B T}$ . Diese Barriere wird durch das Bildladungspotential abgesenkt (orange Region und kleiner Pfeil), wodurch der Strom erhöht wird. Bei der experimentellen Bestimmung der Barriere aus dem Strom, muss also der Bildladungsanteil mit berücksichtigt werden. Die Verarmungsregion des Halbleiters ist hier nicht berücksichtigt.

Analog kann die Austrittsarbeit beschrieben werden, die Barriere für den Austritt eines Elektrons aus dem Metall ins Vakuum. Dabei wird der Halbleiter durch das Vakuum ersetzt. Das Valenzband wird entsprechend durch die Energien der Positronen ersetzt werden. Die Bandlücke entspricht gerade der doppelten Nullpunktsenergie, d.h.  $2m_e c^2$ .

Im Halbraum oberhalb der Oberfläche entspricht die Lösung der einer Punktladung um freien

Raum. Die Randbedingungen auf der Oberfläche verlangen, dass die Feldlinien senkrecht auf der Oberfläche stehen. Diese Randbedingungen werden aber auch von zwei entgegengesetzten Punktladungen erfüllt, wovon eine genau an der Oberfläche gespiegelt ist.

Wir betrachten also ein Potential von zwei Ladungen mit den Ladungen  $q_1$  und  $q_2 = -q_1$  an den Positionen

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}$$

Die Oberfläche wäre gerade die x-y Ebene.

Das Potential dieser Ladungen ist

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{r}) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_2|} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \right) \end{aligned}$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass das Potential auf der Oberfläche verschwindet. Damit ist es im oberen Halbraum identisch mit dem Potential einer Ladung oberhalb der Oberfläche eines metallischen Leiters. Innerhalb des Leiters ist das Potential konstant und gleich Null.

$$\Phi(\vec{r}) = \theta(z)\Phi_0(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\theta(z) \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \right)$$

Die Heaviside funktion<sup>3</sup>  $\theta(z)$  setzt das Potential im Halbraum  $z < 0$ , der vom Leiter ausgefüllt wird, auf Null.

Aus dem Potential können wir mit Hilfe der Poissongleichung die Ladungen bestimmen. Wir erkennen sofort, dass sich auf der Oberfläche des Leiters eine Flächenladung ausbildet, während das Innere des Leiters ladungsneutral ist.

$$\begin{aligned} \rho &= -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi \\ &= -\epsilon_0 \vec{\nabla}^2 (\theta(z)\Phi_0(\vec{r})) \\ &= -\epsilon_0 \left[ \underbrace{(\vec{\nabla}^2 \theta(z))}_{=0 \text{ für } z \neq 0} \underbrace{\Phi_0(\vec{r})}_{=0 \text{ für } z=0} + 2 \underbrace{(\vec{\nabla} \theta(z))}_{=\vec{n}\delta(z)} (\vec{\nabla} \Phi_0(\vec{r})) + \theta(z) \underbrace{\vec{\nabla}^2 \Phi_0(\vec{r})}_{=-\frac{q_1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}-\vec{r}_1) \text{ für } z>0} \right] \\ &= q_1 \delta(\vec{r}-\vec{r}_1) - 2\epsilon_0 \delta(z) \vec{n} \vec{\nabla} \Phi_0(\vec{r}) \\ &= q_1 \delta(\vec{r}-\vec{r}_1) - 2\epsilon_0 \delta(z) \partial_z \Phi_0(\vec{r}) \\ &= q_1 \delta(\vec{r}-\vec{r}_1) - \frac{q_1}{2\pi} \delta(z) \left[ -\frac{-d}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}^3} + \frac{+d}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}^3} \right] \\ &= q_1 \delta(\vec{r}-\vec{r}_1) - \frac{q_1 d}{\pi} \frac{\delta(z)}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}^3} \end{aligned}$$

In dieser Ableitung ist  $\vec{n}$  der Normalenvektor mit Länge 1 auf der Oberfläche.

Es bildet sich also eine Oberflächenladung auf der Oberfläche des Leiters aus.

Die Methode lässt sich außer auf ebenen Leiteroberflächen auch noch auf leitende Kugeln ausweiten.

<sup>3</sup>Die Heavisidefunktion oder Stufenfunktion ist durch  $\theta(x < 0) = 0$ ,  $\theta(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\theta(x > 0) = 1$  definit.



## 5.5 Fouriertransformation

Der Leser sei angehalten sich nun mit der Fouriertransformation im Mathematischen Anhang von Band I vertraut zu machen.

Die Fouriertransformation ist eines der bedeutendsten mathematischen Verfahren sowohl für analytische als auch für numerische Probleme.

Sie eignet sich besonders bei fast homogenen Systemen oder bei periodischen Problemen wie einem Festkörper. In einem kristallinen Festkörper sitzen die Atome auf einem regulären Gitter. Deshalb ist die Ladungsdichte periodisch.

Wir stellen sowohl die Ladungsdichte als auch das Potential als Fourierreihe dar:

$$\rho(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Beachte dabei, dass  $\rho(\vec{r})$  und  $\rho(\vec{k})$  zwar dasselbe Objekt, nämlich die Ladungsdichte, beschreiben, aber ganz andere Funktionen sind, da die Grössen von unterschiedlichen Argumenten abhängen. Dasselbe gilt für  $\Phi$ .

Nun wollen wir anhand der Poissongleichung einen Ausdruck für  $\Phi(\vec{k})$  bestimmen.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) &= \vec{\nabla}^2 \left[ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \right] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi(\vec{k}) \vec{\nabla}^2 e^{i\vec{k}\vec{r}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi(\vec{k}) (i\vec{k})^2 e^{i\vec{k}\vec{r}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ -\vec{k}^2 \Phi(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k}\vec{r}} \end{aligned}$$

Wegen der Poissongleichung gilt aber

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) &= 0 \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ -\vec{k}^2 \Phi(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k}\vec{r}} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} &= 0 \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ -\vec{k}^2 \Phi(\vec{k}) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{k}) \right] e^{i\vec{k}\vec{r}} &= 0 \end{aligned}$$

Da ebene Wellen linear unabhängig sind, müssen die Vorfaktoren Term für Term verschwinden. Daher erhalten wir den gewünschten Zusammenhang

POISSON GLEICHUNG IM FOURIER RAUM

$$\Phi(\vec{k}) = \frac{\rho(\vec{k})}{\epsilon_0 \vec{k}^2} \quad (5.7)$$

Man sieht sofort, dass  $\Phi(\vec{k})$  bei  $\vec{k} = \vec{0}$  divergiert, wenn  $\rho(\vec{k} = \vec{0})$  nicht verschwindet.  $\rho(\vec{k} = \vec{0})$  ist die Gesamtladung, wie man sieht, wenn man in der Darstellung

$$\rho(\vec{k}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

$\vec{k}$  gegen Null gehen lässt.

Die Divergenz hat seinen Ursprung darin, dass das Potential einer Punktladung  $\rho(\vec{k} = \vec{0})$  über den Raum integriert unendlich wird.

$$\int d^3r \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^\infty = \infty$$

Nur wenn die Gesamtladung verschwindet, heben sich die divergierenden Beiträge gegenseitig weg.

Die Divergenz an sich ist deshalb nicht weiter störend. Problematisch wird die Angelegenheit nur, wenn bei der Rücktransformation des Potentials

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{k})}{|\vec{k}|^2} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

das Integral nicht definiert ist.

## 5.6 Methode der Greenschen Funktionen

Die Methode der Greenschen Funktionen ist eine Methode um inhomogene Differentialgleichungen zu vereinfachen.

### 5.6.1 Beispiel Poissongleichung

Die Methode der Greenschen Funktionen basiert auf der folgenden Idee, die wir anhand der Poissongleichung  $\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$  demonstrieren.

Zunächst bestimmt man die Greensfunktion indem man die Inhomogenität durch eine Deltafunktion ersetzt. Die Greensfunktion hängt nicht nur vom Ortsargument, sondern auch vom Ort der Deltafunktion ab.

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Diese Gleichung lässt mittels  $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\delta(\vec{r})$  sofort hinschreiben:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Anhand der Differentialgleichung für die Greensfunktion, lässt sich zeigen, dass die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, der Poissongleichung durch

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \left( -\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right)$$

gegeben ist.

Der Beweis ist einfach:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \Phi(r) &= \vec{\nabla}^2 \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \left( -\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right) = \int d^3r' [\vec{\nabla}^2 G(\vec{r}, \vec{r}')] \left( -\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right) \\ &= \int d^3r' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \left( -\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

q.e.d.

Die Integralform des Potentials Gl. 4.7 erhält man also aus der Poissongleichung mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktionen.<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Beachte, dass wir damals die Integralform des Potentials aus dem Coulombgesetz abgeleitet haben, um daraus die Poissongleichung zu erhalten. Postuliert man umgekehrt, wie sonst üblich, die Maxwellgleichungen, kann man wie hier gezeigt, die Integralform ableiten. Häufig wird jedoch dabei der Begriff der Greenschen Funktionen nicht explizit erwähnt.

### 5.6.2 Beliebige lineare inhomogene Differentialgleichungen

Das Prinzip lässt sich auf beliebige lineare, inhomogene Differentialgleichungen verallgemeinern. Eine lineare, inhomogene Differentialgleichung lässt sich immer in der folgenden Form schreiben

$$\hat{D}(x_i, \partial_{x_i})f(\vec{x}) = I(\vec{x})$$

Dabei ist  $\hat{D}$  ein Differentialoperator. Das Hütchen macht deutlich, dass es sich hier um einen Operator handelt. Man stelle sich eine einfache Funktion  $D(x_i, y_i)$  vor. Nun ersetzt man  $y_i$  durch die Ableitung nach  $x_i$ . Diese Ableitung wirkt auf alles was dahinter steht, also auch auf die Funktion, auf die der Operator angewandt wird. Auf diese Weise entsteht aus  $\Phi(\vec{x})$  eine neue Funktion.

Zum Beispiel wird aus  $D(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^2$  der Laplaceoperator  $\hat{D}(\vec{x}, \vec{\nabla}) = \vec{\nabla}^2$ . Wenden wir den Differentialoperator auf das Potential  $f = \Phi$  an, wird daraus wieder ein sinnvoller Ausdruck  $\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r})$ . Der Term  $I(\vec{x})$  ist die Inhomogenität. Im Falle der Poissonsgleichung wäre  $I(\vec{r}) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$ .

Nun bestimmen wir die Greensfunktion

$$\hat{D}G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

und erhalten dann die Lösungen mit jeder beliebigen Inhomogenität als

$$f(\vec{x}) = \int d^d x' G(\vec{x}, \vec{x}') I(\vec{x}')$$

### 5.6.3 Analogie mit linearen Gleichungssystemen von Vektoren

Es gibt eine Analogie zu Matrizen. Seien  $\mathbf{D}$  eine Matrix und  $\vec{I}$  sowie  $\vec{f}$  Vektoren. Dann können wir das Gleichungssystem

$$\mathbf{D}\vec{f} = \vec{I}$$

lösen, indem wir zunächst die Matrix  $\vec{D}$  invertieren

$$\mathbf{G}\mathbf{D} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G} = \mathbf{D}^{-1}$$

und anschließend mit dem Vektor  $\vec{I}$  multiplizieren

$$\vec{f} = \mathbf{G}\vec{I}$$

Der Unterschied zwischen dem Matrixbeispiel und dem mit Funktionen ist nur, dass der Funktionswert  $\vec{x}$  in einen Satz diskreter Indizes  $i = 1, 2, \dots$  übergeführt wird. Beachte, dass die Matricelemente der Einheitsmatrix  $\mathbf{1}$  gerade durch das Kronecker-Symbol  $\delta_{i,j}$  ausgedrückt wird. Die  $\delta$ -Funktion, welche in der Definition der Greensfunktion auftritt, kann als Verallgemeinerung des Kroneckersymbols auf kontinuierliche Indizes angesehen werden, genauso, wie eine Funktion aus einem Vektor entsteht wenn man die Indizes kontinuierlich macht.

$\delta$ -Funktion

## 5.7 Multipolentwicklung

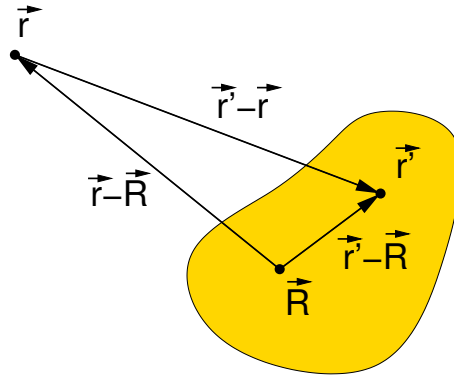
Während sich die Fouriertransformation für fast translationssymmetrische Probleme eignet, ist die Multipolentwicklung besonders für Probleme mit einem ausgezeichneten Zentrum geeignet. Zum Beispiel mag uns das Potential im Fernfeld einer lokalisierten Ladungsdichte wie der eines Moleküls interessieren.

Ist die Ladungsdichte in einem Bereich  $\Omega$  lokalisiert, dessen Ausdehnung klein gegenüber dem Abstand ist, an dem wir das Potential bestimmen wollen, können wir die Ausdehnung als kleinen

Parameter betrachten und eine entsprechende Taylorentwicklung ansetzen.

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \int_{\Omega} d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= \int_{\Omega} d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|(\vec{r}-\vec{R})-(\vec{r}'-\vec{R})|}\end{aligned}$$

Dabei sei  $\vec{R}$  ein beliebiger Aufpunkt im Bereich  $\Omega$ . Es sei  $|\vec{r}'-\vec{R}| \ll |\vec{r}-\vec{R}|$ .



Eine Koordinatentransformation, die den Aufpunkt  $\vec{R}$  in den Ursprung verschiebt, vereinfacht das Problem ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Im folgenden gilt also  $\vec{R} = 0$

Nun wollen wir noch einige Nebenrechnungen durchführen, die später benötigt werden.

$$\begin{aligned}\partial_i |\vec{r}| &= \partial_i \left( \sum_j x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \sum_j x_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (2x_i) = \frac{x_i}{|\vec{r}|} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} |\vec{r}| &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\end{aligned}\tag{5.8}$$

$$\partial_i |\vec{r}|^n \stackrel{\text{Gl. 5.8}}{=} n |\vec{r}|^{n-1} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = n |\vec{r}|^{n-2} \vec{r}\tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{r}|} &\stackrel{\text{Gl. 5.9}}{=} \partial_i \left( -\frac{x_j}{|\vec{r}|^3} \right) = -(\partial_i x_j) |\vec{r}|^{-3} - x_j \partial_i |\vec{r}|^{-3} \\ &\stackrel{\text{Gl. 5.9}}{=} -\delta_{ij} |\vec{r}|^{-3} - x_j (-3 |\vec{r}|^{-5} \vec{r}) \\ &= -\delta_{ij} |\vec{r}|^{-3} - x_j (-3 |\vec{r}|^{-4}) \frac{x_i}{|\vec{r}|} = \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} \vec{r}^2}{|\vec{r}|^5} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} &= \frac{3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1} \vec{r}^2}{|\vec{r}|^5}\end{aligned}\tag{5.10}$$

Im folgenden benötigen wir die Taylorentwicklung

## TAYLORENTWICKLUNG

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \Delta\vec{r} \vec{\nabla} \Big|_{\vec{r}_0} \right)^n f \quad (5.11)$$

Dabei hat  $\Delta\vec{r}$  den Wert  $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ , wird aber als Zahl betrachtet. Das bedeutet, dass der Gradient  $\Delta\vec{r}$  als Konstante und nicht als Funktion von  $\vec{r}$  betrachtet.

In Komponenten erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \\ &= f(\vec{r}_0) + \sum_i \Delta r_i \partial_i \Big|_{\vec{r}_0} f + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Delta r_i \Delta r_j \partial_i \partial_j \Big|_{\vec{r}_0} f + O(\Delta\vec{r})^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nun entwickeln wir entsprechend  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  um  $\vec{r}$  in  $\vec{r}'$ . Wir ersetzen in Gl. 5.12  $f(\vec{r}) \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}|}$ ,  $\Delta\vec{r} \rightarrow -\vec{r}'$  und  $\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &\stackrel{\text{Gl. 5.9, 5.10}}{=} \frac{1}{|\vec{r}|} + \sum_i (-x'_i) \left( -\frac{x_i}{|\vec{r}|^3} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} \vec{r}^2}{|\vec{r}|^5} + \dots \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|} + \sum_i x'_i \frac{x_i}{|\vec{r}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( 3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}^2 \right) \frac{x_i x_j}{|\vec{r}|^5} + \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

Den letzte Schritt verdeutlicht man sich am Besten, indem man die beiden Beiträge des letzten Terms einzeln betrachtet:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} x'_i x'_j (3x_i x_j - \delta_{ij} \vec{r}^2) &= \sum_{i,j} 3x'_i x'_j x_i x_j - \underbrace{\left( \sum_{i,j} \delta_{ij} x'_i x'_j \right)}_{\vec{r}^2} \vec{r}^2 \\ &= \sum_{i,j} 3x'_i x'_j x_i x_j - \vec{r}^2 \underbrace{\sum_{i,j} \delta_{ij} x_i x_j}_{\vec{r}^2} = \sum_{i,j} \left( 3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}^2 \right) x_i x_j \end{aligned}$$

Nun setzen wir die Taylorentwicklung in den Ausdruck für das Potential ein und erhalten

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}')}_{\text{Monopol}} + \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}_{\text{Dipol}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^5} \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}') \left( 3x'_i x'_j - \delta_{ij} \vec{r}'^2 \right)}_{\text{Quadrupol}} + \dots \end{aligned}$$

## MULTIPOLE

Das Potential kann also in der Form

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\frac{q}{|\vec{r}|^1}}_{\sim \frac{1}{|\vec{r}|}} + \underbrace{\frac{\vec{p}\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}_{\sim \frac{1}{|\vec{r}|^2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{|\vec{r}|^5}}_{\sim \frac{1}{|\vec{r}|^3}} + \dots \right] \quad (5.14)$$

dargestellt werden, wobei die **Multipole**  $q, \vec{p}, \mathbf{Q}$  nur von der Ladungsverteilung abhängen.

- **Monopol** Gesamtladung

$$q = \int d^3r \rho(\vec{r}) \quad (5.15)$$

- **Dipol**

$$\vec{p} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r} \quad (5.16)$$

- **Quadrupol**

$$\mathbf{Q} = \int d^3r \rho(\vec{r}) (3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1}r^2) \quad (5.17)$$

Der Quadrupol ist ein spurloser Tensor.

Beachte, dass die Beiträge der höheren Terme der Entwicklung bei großen Abständen immer schneller mit dem Abstand kleiner werden. Das Fernfeld des Potentials ist also durch die niedrigsten Multipole eindeutig bestimmt.

Darüber hinaus kann man die Taylorentwicklung im Prinzip beliebig weit treiben und damit beliebig genau machen. Dies zeigt, dass das Potential einer lokalisierten Ladungsdichte im Außenbereich eindeutig durch die Gesamtheit seiner Multipole bestimmt wird. Die Form der Ladungsdichte ist also für den Außenbereich unerheblich, sondern nur deren Multiplolmomente.

### Punktmultipole

Es ist häufig hilfreich die Ladungsdichte von punktförmigen Multipolen zu kennen, weil sich damit recht leicht hantieren lässt. Mit Hilfe der Multipolentwicklung können wir dann eine Ladungsdichte durch Punktmultipole ersetzen. Im Außenbereich der Ladungsdichte erzeugen diese dann dasselbe Potential wie die ursprüngliche Ladungsdichte.

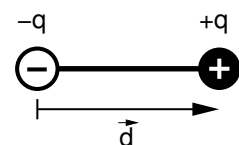
### Punktmonopol

Die Ladungsdichte eines Punktmonopols ist gerade die  $\delta$ -Funktion

$$\rho_{mon}(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

### Punktdipol

Um die Ladungsdichte eines Punktdipols zu bestimmen, betrachten wir einen Dipol aus zwei Punktladungen  $+q$  und  $-q$ , die in einem Abstand  $\vec{d}$  angeordnet sind. Diesen Abstand lassen wir anschließend zu Null gehen. Die Ladungsdichte eines solchen Dipols am Ort  $\vec{r}_0$  ist



$$\rho_{dip}(\vec{r}) = \lim_{|\vec{d}| \rightarrow 0} q\delta(\vec{r} - (\vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{d})) - q\delta(\vec{r} - (\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{d})) \quad (5.18)$$

Diese Punktladungsdichte besitzt keinen Monopol, aber einen Dipol und auch höhere Multipolmomente. Wir bestimmen das Dipolmoment dieser Punktladungsverteilung

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int d^3r \rho_{dip}(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \lim_{\vec{d} \rightarrow 0} \int d^3r \underbrace{\left[ q\delta(\vec{r} - (\vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{d})) - q\delta(\vec{r} - (\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{d})) \right]}_{q\frac{1}{2}\vec{d} - q(-\frac{1}{2}\vec{d})} (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \lim_{\vec{d} \rightarrow 0} q\vec{d} \end{aligned}$$

Nun bilden wir den Grenzübergang  $|\vec{d}| \rightarrow 0$ , wobei der Dipol der Ladungsdichte konstant bleibt.

Das erreichen wir indem wir die Ladung und den Abstandsvektor als Funktionen eines Skalierungsfaktors  $\lambda$  auffassen, der im Grenzfall verschwindet.

$$\begin{aligned} \vec{d}(\lambda) &= \lambda \vec{p} \\ q(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Wir überzeugen uns, dass das Dipolmoment für jeden Wert von  $\lambda$  gleich  $\vec{p}$  ist.

Die Ladungsdichte eines Punktdipols  $\rho_{dip}$  ist eine Distribution, die wir, wie bei der Definition der  $\delta$ -Funktion über das Integral mit einer beliebigen Funktion  $f(\vec{r})$  definieren.

$$\begin{aligned} \int d^3r f(\vec{r}) \rho_{dip}(\vec{r}) &\stackrel{\text{Gl. 5.18}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^3r f(\vec{r}) \overbrace{\frac{1}{\lambda}}^{q(\lambda)} \left[ \delta(\vec{r} - (\vec{r}_0 + \lambda \frac{\vec{p}}{2})) - \delta(\vec{r} - (\vec{r}_0 - \lambda \frac{\vec{p}}{2})) \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ f(\vec{r}_0 + \lambda \frac{\vec{p}}{2}) - f(\vec{r}_0 - \lambda \frac{\vec{p}}{2}) \right] \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [\lambda \vec{p} \cdot \vec{\nabla}|_{\vec{r}_0} f + O(\lambda^2)] \\ &= \vec{p} \cdot \vec{\nabla}|_{\vec{r}_0} f \\ &= \int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{p} \cdot \vec{\nabla}|_{\vec{r}} f \\ &= \underbrace{\int d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}_{=0(\text{Gauß})} - \int d^3r f(\vec{r}) \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \int d^3r f(\vec{r}) [-\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] \end{aligned}$$

Da die Identität für beliebige Funktionen  $f(\vec{r})$  erfüllt ist, folgt daraus der folgende Ausdruck für die Ladungsdichte eines Punktdipols  $\rho_{dip}(\vec{r})$ .

#### LADUNGSDICHTE EINES PUNKTDIPOLS

Die Ladungsdichte  $\rho_{dip}(\vec{r})$  eines Punktdipols mit Dipolmoment  $\vec{p}$  am Ort  $\vec{r}_0$  ist

$$\rho_{dip}(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (5.19)$$

Um zu zeigen, dass dies tatsächlich ein Punktdipol ist, muss man noch nachweisen, dass alle anderen Multipole für die Ladungsdichte  $\rho_{dip}$  verschwinden. Dies lässt sich leicht durch Einsetzen nachweisen.

### Punktquadrupol (Heimstudium)

#### LADUNGSDICHTE EINES PUNKTQUADRUPOLS

Die Ladungsdichte  $\rho_{quad}(\vec{r})$  eines Punktquadrupols mit dem Quadrupolmoment  $\mathbf{Q}$  am Ort  $\vec{r}_0$  ist

$$\rho_{quad}(\vec{r}) = \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \partial_i \partial_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$\mathbf{Q}$  muss die Eigenschaften eines Quadrupoltensors besitzen, nämlich symmetrisch, d.h.  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ , und spurlos,  $\text{Sp}[\mathbf{Q}] = 0$ , sein.

Die Herleitung ist analog zu der des Punktdipols. Wir beschränken uns hier darauf das Resultat zu überprüfen, indem wir zeigen, dass das Quadrupolmoment dieser Ladungsdichte, im folgenden  $\mathbf{Q}$ , gerade mit der Matrix  $\bar{\mathbf{Q}}$  übereinstimmt, welche die Ladungsdichte definiert. Dabei setzen wir voraus, dass  $\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}^T$  und  $\text{Sp}[\bar{\mathbf{Q}}] = 0$ .

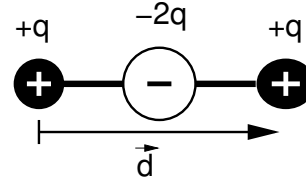
$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \int d^3r \rho_{quad}(\vec{r}) (3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1}\vec{r}^2) \\ &= \int d^3r \left[ \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \bar{Q}_{ij} \partial_i \partial_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right] [3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1}\vec{r}^2] \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \bar{Q}_{ij} \int d^3r [3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1}\vec{r}^2] \partial_i \partial_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \bar{Q}_{ij} \int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \partial_i \partial_j [3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1}\vec{r}^2] \\ Q_{kl} &= \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \bar{Q}_{ij} \int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \partial_i \partial_j [3x_k x_l - \delta_{kl}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)] \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \bar{Q}_{ij} \int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \partial_i [3\delta_{j,k} x_l + 3\delta_{j,l} x_k - \delta_{k,l} 2x_j] \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \bar{Q}_{ij} \int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) [3\delta_{j,k} \delta_{i,l} + 3\delta_{j,l} \delta_{i,k} - \delta_{k,l} 2\delta_{i,j}] \\ &= \frac{1}{6} \left[ 3\bar{Q}_{l,k} + 3\bar{Q}_{l,k} - \delta_{k,l} \sum_{i=1}^3 \bar{Q}_{i,i} \right] \end{aligned}$$

Nun nutzen wir die Eigenschaften des Quadrupolmoments aus, denen  $\bar{\mathbf{Q}}$  genügen muss, nämlich, dass es ein symmetrischer, spurloser Tensor ist. Damit erhalten wir  $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}$  was zu beweisen war.

### Spezielle Punktquadrupole



Einen allgemeinen Quadrupol kann man sich aus elementaren Quadrupolen zusammensetzen. Für einen solchen elementaren Quadrupol betrachten wir drei Ladungen wovon sich zwei gleiche Ladungen am Ende einer Linie befinden und zwei entgegengesetzte Ladungen in der Mitte. Die Länge der Verbindungslinie lassen wir anschließend, analog zum Punktdipol, gegen Null gehen. Dabei normieren wir das Quadrupolmoment so, dass seine Determinante gerade 1 ergibt. Der Einfachheit halber legen wir das Zentrum des Quadrupols in den Ursprung.



$$\rho_{quad}(\vec{r}) = \lim_{|\vec{d}| \rightarrow 0} \left[ q\delta(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}) - 2q\delta(\vec{r}) + q\delta(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}) \right] \quad (5.20)$$

Das Quadrupolmoment des entsprechenden elementaren Quadrupols ist

$$\mathbf{Q} \stackrel{\text{Gl. 5.17}}{=} \int d^3r \rho_{quad}(\vec{r}) (3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1}\vec{r}^2) \stackrel{\text{Gl. 5.20}}{=} \lim_{|\vec{d}| \rightarrow 0} \frac{q}{4} (3\vec{d} \otimes \vec{d} - \mathbf{1}\vec{d}^2)$$

Die Bedingung  $\det \mathbf{Q} = 1$  führt auf  $q(|\vec{d}|) = 4/(\sqrt[3]{2}|\vec{d}|^2)$ .

Zeigt  $\vec{d}$  in x-Richtung, dann ist das Quadrupolmoment

$$\mathbf{Q} \stackrel{d||\vec{e}_x}{=} \lim_{|\vec{d}| \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zeigt  $\vec{d}$  in Diagonale in der xy-Ebene, d.h.  $\vec{d} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$  dann ist das Quadrupolmoment

$$\mathbf{Q} \stackrel{d||\frac{1}{2}\sqrt{2}(\vec{e}_x+\vec{e}_y)}{=} \lim_{|\vec{d}| \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Überlagern wir zwei elementare Quadrupole, von denen der Vektor  $\vec{d}_1 = (1, 0, 0)$  des einen Quadrupols mit  $q_1 = +q$  in x-Richtung und der des anderen,  $\vec{d}_2 = (0, 1, 0)$ , in y-Richtung zeigt. Dabei soll der zweite Quadrupol gerade die umgekehrte Ladung  $q_2 = -q$  besitzen.

$$\mathbf{Q} = \lim_{|\vec{d}| \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass die Determinante dieses Quadrupols verschwindet.

## 5.8 Kugelflächenfunktionen

Neben der Fouriertransformation spielen die Kugelflächenfunktionen eine ganz besondere Rolle. Sie kommen bei fast zentralsymmetrischen Problemen zum Einsatz. Die Kugelflächenfunktionen bilden einen vollständigen und orthogonalen Basissatz im Raum der Winkel.

Die elektronischen Wellenfunktionen in der Atomphysik lassen sich nach ihren Kugelflächenfunktionen charakterisieren. Wann immer wir über s-, p- oder d-Elektronen sprechen, bezeichnen wir damit implizit Kugelflächenfunktionen.

### 5.8.1 Eigenschaften der Kugelflächenfunktion

Ich werde hier zunächst die wichtigsten Eigenschaften aufzählen:

#### EIGENSCHAFTEN DER KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN

- Die Kugelflächenfunktionen  $Y_{\ell,m}(\vec{r})$  hängen von zwei Indizes ab. Der Bereich der Indizes ist

$$\ell = 0, 1, 2, \dots \quad m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$$

Die Kugelflächenfunktionen hängen nicht vom Betrag  $|\vec{r}|$  ab sondern nur von der Richtung. Deshalb kann man sie auch als Funktion von zwei Winkeln darstellen:  $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ .

- Die Kugelflächenfunktionen sind durch zwei Eigenwertgleichungen definiert

$$(\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 Y_{\ell,m}(\vec{r}) = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell,m}(\vec{r}) \quad (5.21)$$

$$(\vec{r} \times \vec{\nabla})_z Y_{\ell,m}(\vec{r}) = im Y_{\ell,m}(\vec{r}) \quad (5.22)$$

- Orthogonalität:

$$\oint_{|\vec{r}|=r_c} dA Y_{\ell,m}^* Y_{\ell',m'} = r_c^2 \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'} \quad (5.23)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind orthogonal

- Entwicklungssatz:

$$f(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} R_{\ell,m}(|\vec{r}|) Y_{\ell,m}(\vec{r}) \quad (5.24)$$

$$\Leftrightarrow R_{\ell,m}(|\vec{r}|) = \int_{|\vec{r}'|=|\vec{r}|} dA' \frac{1}{|\vec{r}|^2} f(\vec{r}') Y_{\ell,m}^*(\vec{r}') \quad (5.25)$$

$$= \int d^3r f(\vec{r}') Y_{\ell,m}^*(\vec{r}') \frac{\delta(|\vec{r}| - |\vec{r}'|)}{|\vec{r}|^2} \quad (5.26)$$

Jede Funktion lässt sich als Superposition von Kugelflächenfunktionen und ihnen zugeordnete Radialfunktionen darstellen. Dieser Ausdruck ist analog zur Rück- und Vorwärtstransformation bei der Fouriertransformation, nur, dass die Transformation hier auf dem Winkelraum stattfindet.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Beweis des Entwicklungssatzes.

$$\begin{aligned} & \int d^3r Y_{\ell,m}^*(\vec{r}) \frac{\delta(|\vec{r}| - |\vec{r}'|)}{|\vec{r}|^2} \underbrace{\sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} R_{\ell',m'}(|\vec{r}'|) Y_{\ell',m'}(|\vec{r}'|)}_{f(\vec{r})} \\ &= \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \int dr \frac{\delta(|\vec{r}| - |\vec{r}'|)}{|\vec{r}|^2} R_{\ell',m'}(|\vec{r}'|) \underbrace{\oint dA Y_{\ell,m}^*(\vec{r}) Y_{\ell',m'}(|\vec{r}'|)}_{r^2 \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}} \\ &= R_{\ell,m}(|\vec{r}|) \end{aligned}$$

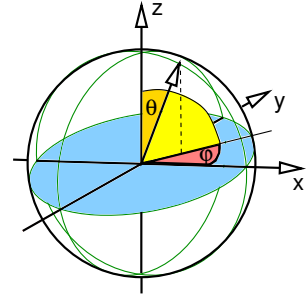
Dieser Beweis enthält noch nicht den Beweis der Vollständigkeit, nämlich, dass sich jede Winkelabhängigkeit durch Kugelflächenfunktionen darstellen lässt.

- Darstellung in Polarkoordinaten

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \underbrace{P_{\ell}^m(\cos(\theta))}_{\text{zugeordnete Legendrepolynome}} e^{im\phi} \quad (5.27)$$

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \quad (5.28)$$

Die zugeordneten Legendrepolynome, werden aus den Legendrepolynomen ermittelt. Die Legendrepolynome und die zugeordneten Legendrepolynome lassen sich mittels Rekursionsgleichungen bestimmen. Dabei ist es wichtig, die Rekursionen in der richtigen Richtung anzusetzen, weil sie in die eine Richtung numerisch immer genauer, in die andere Richtung aber sogar instabil wird. Eine Beschreibung findet man in den Numerical Recipes[7].



### Kubische Kugelflächenfunktionen

Zusätzlich zu den regulären Kugelflächenfunktionen gibt es auch die reellen oder **kubischen Kugelflächenfunktionen**  $\vec{Y}_{\ell,m}(\vec{r})$

$$\vec{Y}_{\ell,m} = \sqrt{2} \text{Re}[Y_{\ell,|m|}]$$

$$\vec{Y}_{\ell,-m} = \sqrt{2} \text{Im}[Y_{\ell,|m|}]$$

Das Zeichen  $\text{Re}(x)$  bezeichnet den Realteil von  $x$  und das Zeichen  $\text{Im}(x)$  seinen Imaginärteil.

Für die kubischen Kugelflächenfunktionen gelten weiterhin

- Orthogonalität
- Entwicklungssatz
- die Eigenwertgleichung  $(\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 \vec{Y}_{\ell,m} = \ell(\ell+1) \vec{Y}_{\ell,m}$  gilt auch für die Kubischen Kugelflächenfunktionen, aber die zweite gilt nicht. Also  $(\vec{r} \times \vec{\nabla})_z \vec{Y}_{\ell,m} \neq m \vec{Y}_{\ell,m}$ .

| $\ell$ | $m$ | $Y_{\ell,m}(r)$                                    | $Y_{\ell,m}^{\text{reell}}$                   |
|--------|-----|--|---|
| 0      | 0   | $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$                            | $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$                       |
| 1      | -1  | $\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x+iy}{r}$             | $\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x}{r}$           |
| 1      | 0   | $\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$                | $\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$           |
| 1      | 1   | $\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{(x-iy)}{r}$           | $\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{y}{r}$           |
| 2      | -2  | $\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{x^2+y^2+2ixy}{r^2}$ | $\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{x^2+y^2}{r^2}$ |
| 2      | -1  | $\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{xz+iyz}{r^2}$        | $\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{xz}{r^2}$       |
| 2      | 0   | $\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{3z^2-r^2}{r^2}$      | $\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{3z^2-r^2}{r^2}$ |
| 2      | +1  | $\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{xz-iyz}{r^2}$        | $\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{yz}{r^2}$       |
| 2      | +2  | $\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{x^2+y^2-2ixy}{r^2}$ | $\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{xy}{r^2}$       |

### Polardarstellung der Kugelflächenfunktion

Kugelflächenfunktionen werden häufig durch keulenartige Objekte dargestellt. Die Oberflächen sind durch  $\frac{1}{r} Y_{\ell,m}(r) = \pm 1$  definiert. Der Abstand von Ursprung gibt die Größe der Kugelflächenfunktion an.

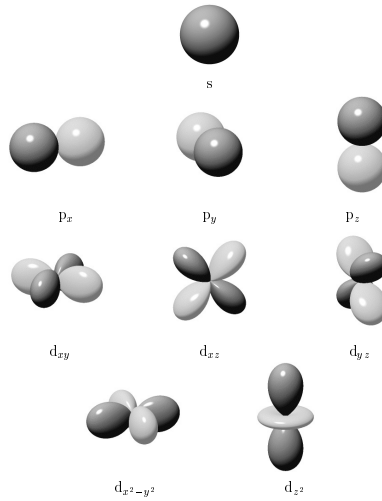


Abb. 5.5: Kubische Kugelflächenfunktionen: Die Darstellung entspricht der Oberfläche, welche durch  $|\frac{1}{r}| \tilde{Y}_{\ell,m}(\vec{r})| = 1$  definiert ist. Für einen gegebenen Winkel, ist der Abstand der Oberfläche vom Ursprung gleich dem Absolutwert der kubischen Kugelflächenfunktion. Die unterschiedlichen Grautöne entsprechen den unterschiedlichen Vorzeichen der Kugelflächenfunktionen.

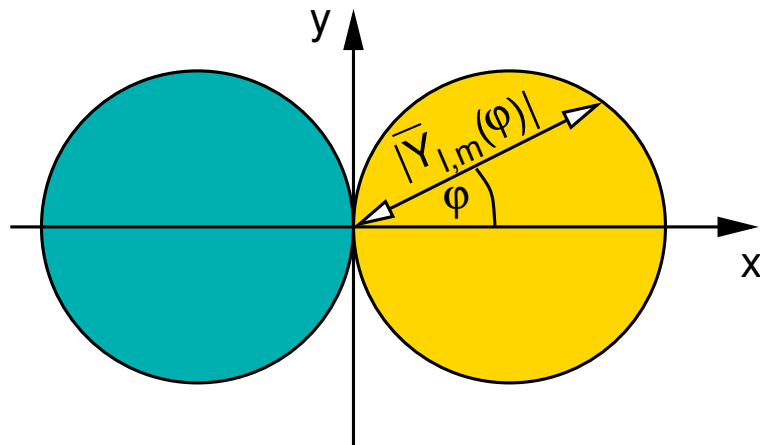


Abb. 5.6: Polarkoordinatendarstellung einer reellen Kugelflächenfunktion ( $\cos(\varphi)$ ). Beachte, dass Realteil und Imaginärteil einer komplexen Funktion getrennt dargestellt werden müssen.

### 5.8.2 Poissongleichung in Kugelflächenfunktionen

Unser Ziel ist es wiederum, die Poissongleichung

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

zu lösen.

Der Laplaceoperator  $\vec{\nabla}^2$  lässt sich in der folgenden Form darstellen:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{|\vec{r}|} \partial_r^2 |\vec{r}| + \frac{1}{|\vec{r}|^2} (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 \quad (5.29)$$

Diese Identität ist in Anhang F auf S. 247 hergeleitet. Dabei ist

$$\partial_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \vec{\nabla} \quad (5.30)$$

die **Radialableitung**.

Diese Darstellung des Laplaceoperators erscheint umständlich, erlaubt aber eine Trennung in Winkel und Radialteil, was die Anwendung auf eine Kugelflächenfunktionenentwicklung vereinfacht.

Betrachten wir also eine beliebige Funktion, die als Produkt eines Radialteils  $R_{\ell,m}(|\vec{r}|)$  und einer Kugelflächenfunktion darstellbar ist.

$$f(\vec{r}) = R_{\ell,m}(|\vec{r}|) Y_{\ell,m}(\vec{r})$$

Eine Entwicklung in Kugelflächenfunktionen wird aus solchen Produkten aufgebaut.

- Zunächst betrachten wir den Teil des Laplaceoperators Gl. 5.29, der nur die Radialableitungen enthält. Dabei können wir ausnutzen, dass die Radialableitung der Kugelflächenfunktionen verschwinden, da letztere nur vom Winkel aber nicht von Abstand abhängen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}|} \partial_r^2 |\vec{r}| R_{\ell,m} Y_{\ell,m} &= \frac{1}{|\vec{r}|} \partial_r \left[ (\partial_r |\vec{r}| R_{\ell,m}) Y_{\ell,m} + |\vec{r}| R_{\ell,m} \underbrace{(\partial_r Y_{\ell,m})}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|} \left[ (\partial_r^2 |\vec{r}| R_{\ell,m}) Y_{\ell,m} + (\partial_r |\vec{r}| R_{\ell,m}) \underbrace{(\partial_r Y_{\ell,m})}_{=0} \right] \\ &= Y_{\ell,m} \left[ \frac{1}{|\vec{r}|} \partial_r^2 |\vec{r}| R_{\ell,m} \right] \end{aligned}$$

- Nun betrachten wir den Anteil von Gl. 5.29, der nur die Winkelableitungen  $\vec{r} \times \vec{\nabla}$  enthält. Dabei profitieren wir davon, dass die Winkelableitung nicht auf den Radialteil wirkt, weil der Gradient des Radialteils parallel zu  $\vec{r}$  ist, sodass das Kreuzprodukt  $\vec{r} \times \vec{\nabla} R$  verschwindet.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}|^2} (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 [R_{\ell,m} Y_{\ell,m}] &= \frac{1}{|\vec{r}|^2} (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \left[ \underbrace{(\vec{r} \times (\vec{\nabla} R_{\ell,m}))}_{=0} Y_{\ell,m} + R_{\ell,m} ((\vec{r} \times \vec{\nabla}) Y_{\ell,m}) \right] \\ &= \frac{1}{|\vec{r}|^2} \left[ \underbrace{(\vec{r} \times (\vec{\nabla} R_{\ell,m}))}_{=0} Y_{\ell,m} + R_{\ell,m} \underbrace{((\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 Y_{\ell,m})}_{=-\ell(\ell+1)Y_{\ell,m}} \right] \\ &= Y_{\ell,m} \left[ -\frac{\ell(\ell+1)}{|\vec{r}|^2} R_{\ell,m} \right] \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Eigenwertgleichung der Kugelflächenfunktionen eingesetzt.

Nun stellen wir Potential und Ladungsdichte als Kugelflächenfunktionenentwicklung dar:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \phi_{\ell,m}(|\vec{r}|) Y_{\ell,m}(\vec{r}) \\ \rho(\vec{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \rho_{\ell,m}(|\vec{r}|) Y_{\ell,m}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Beachte hier, dass wir die Symbole für die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  und seine Radialteile  $\rho_{\ell,m}(|\vec{r}|)$  nur durch die Indizes unterscheiden.

Einsetzen in die Poissongleichung liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla}^2 \Phi + \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ \vec{\nabla}^2 (\phi_{\ell,m}(|\vec{r}|) Y_{\ell,m}(\vec{r})) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\ell,m}(|\vec{r}|) Y_{\ell,m}(\vec{r}) \right] \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\vec{r}) \left[ \left( \frac{1}{|\vec{r}|} \partial_r^2 |\vec{r}| - \frac{\ell(\ell+1)}{|\vec{r}|^2} \right) \phi_{\ell,m}(|\vec{r}|) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\ell,m}(|\vec{r}|) \right] \end{aligned}$$

Wenn die Poissongleichung im ganzen Raum gilt, dann müssen wegen dem Entwicklungssatz die Radialgleichungen für alle Komponenten erfüllt sein. Also gilt für alle  $\ell, m$

#### RADIALGLEICHUNGEN DER POISSONGLEICHUNG

$$\left( \frac{1}{r} \partial_r^2 r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \phi_{\ell,m}(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\ell,m}(r)$$

Da diese Gleichungen nur noch vom Betrag von  $\vec{r}$  abhängen führen wir die Radialkoordinate  $r = |\vec{r}|$  ein. Beachte, dass  $\partial_r f(r)$  gerade die Ableitung von  $f$  nach  $r$  ist. Der Leser mag dies mit Hilfe der obigen Definition überprüfen.

### 5.8.3 Greensfunktion der Radialgleichung

Im Folgenden werden wir diese Gleichungen mit Hilfe der Methode der Greensfunktionen lösen. Die Greensfunktion ist durch

$$\left( \frac{1}{r} \partial_r^2 r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) G_{\ell,m}(r, r_0) = \delta(r - r_0) \quad (5.31)$$

definiert. Ist die Greensfunktion bekannt, erhalten wir die Lösung der radialen Poissongleichung als

$$\phi_{\ell,m}(r) = \int_0^{\infty} dr_0 G_{\ell,m}(r, r_0) \frac{-\rho_{\ell,m}(r_0)}{\epsilon_0} \quad (5.32)$$

wovon man sich durch Einsetzen überzeugen kann.

Um die Greensfunktion aufzustellen benötigen wir zunächst die Lösungen der homogenen Differentialgleichung, der Laplacegleichung.

#### Homogene DGL

Die Greensfunktion ist eine stückweise Lösung der homogenen DGL. Deswegen bestimmen wir zunächst deren Lösungen.

Als Ansatz eignet sich eine Potenz.

$$\begin{aligned} \phi_{\ell,m}(r) &= r^n \\ 0 &= \left[ \frac{1}{r} \partial_r^2 r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] r^n \\ &= [(n+1)n - \ell(\ell+1)] r^{n-2} \\ 0 &= (n+1)n - \ell(\ell+1) \end{aligned}$$

Die zwei Lösungen für  $n$  sind  $n = \ell$  und  $n = -\ell - 1$ .

Die Lösung der homogenen DGL ist also

$$\phi_{\ell,m}(r) = Ar^\ell + Br^{-\ell-1}$$

Beachte aber, dass die Lösung für  $B \neq 0$  einen Pol bei  $r = 0$  aufweist. Eine solche Lösung müssen wir als Lösung der Laplacegleichung ausschliessen, weil sie am Ursprung nicht differenzierbar ist. Diese Lösungen führen uns aber auf die Potentiale von Punktmultipolen.

#### ALLGEMEINE LÖSUNG DER LAPLACE-GLEICHUNG

Die Allgemeine Lösung der Laplace Gleichung lässt sich als immer in der Form darstellen

$$\Phi_{hom}(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} A_{\ell,m} |\vec{r}|^\ell Y_{\ell,m}(\vec{r})$$

Diese Form ist nützlich, um aus einer gegebenen speziellen Lösung der Poissongleichung die allgemeine Lösung zu ermitteln.

#### Inhomogene DGL für die radiale Greensfunktion

Daraus bilden wir einen Ansatz für die inhomogene DGL. Die Lösung wird dadurch eingeschränkt, dass sie am Ursprung nicht singular sein darf und im Unendlichen verschwinden muss.

$$\begin{aligned} G_{\ell,m}(r, r_0) &= Ar^\ell \underbrace{[1 - \theta(r - r_0)]}_{=0 \text{ für } r > r_0} + Br^{-\ell-1} \underbrace{\theta(r - r_0)}_{=0 \text{ für } r < r_0} \\ &= Ar^\ell + [Br^{-\ell-1} - Ar^\ell] \theta(r - r_0) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Dabei ist  $\theta(x)$  die Heaviside Funktion.

Die Koeffizienten werden durch Einsetzen in die DGL bestimmt

$$\left[ \frac{1}{r} \partial_r^2 r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \left[ \underbrace{Ar^\ell + [Br^{-\ell-1} - Ar^\ell]}_{f(r)} \underbrace{\theta(r - r_0)}_{g(r)} \right] = \delta(r - r_0) \quad (5.34)$$

Der erste Term verschwindet weil er gerade eine Lösung der radialen Laplacegleichung ist.

$$\left[ \frac{1}{r} \partial_r^2 r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] Ar^\ell = 0$$

Nun betrachten wir den verbleibenden Term und nutzen die in der Formel Gl. 5.34 angegebenen Kürzel  $f(r)$  und  $g(r)$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{r} \partial_r^2 r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] fg &= \frac{1}{r} \partial_r [\partial_r r f g] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f g \\ &= \frac{1}{r} \partial_r [(\partial_r r f) g + r f (\partial_r g)] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f g \\ &= \frac{1}{r} [(\partial_r^2 r f) g + 2(\partial_r r f)(\partial_r g) + r f (\partial_r^2 g)] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f g \\ &= \underbrace{\left[ \frac{1}{r} \partial_r^2 r f - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f \right]}_{=0} g + \frac{2}{r} (\partial_r r f)(\partial_r g) + f (\partial_r^2 g) \\ &\stackrel{\text{Gl. 5.34}}{=} \underbrace{[-2\ell Br^{-\ell-2} - 2(\ell+1)Ar^{\ell-1}]}_{a(r)} \underbrace{\delta(r - r_0)}_{\partial_r \theta(r - r_0)} \\ &\quad + \underbrace{[Br^{-\ell-1} - Ar^\ell]}_{b(r)} \partial_r \delta(r - r_0) \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine Gleichung von der Form

$$a(r)\delta(r-r_0) + b(r)\partial_r\delta(r-r_0) = \delta(r-r_0) \quad (5.35)$$

mit

$$a(r) = -2\ell Br^{-\ell-2} - 2(\ell+1)Ar^{\ell-1} \quad (5.36)$$

$$b(r) = Br^{-\ell-1} - Ar^\ell \quad (5.37)$$

Gleichung Gl. 5.35 ist nicht ganz trivial zu lösen. Wir erinnern uns, dass Deltafunktionen über Integrale definiert sind. Betrachten wir also eine beliebige Funktion  $F(r)$  und integrieren das Produkt dieser Funktion mit unserer Gleichung. Dies ist ein sehr nützliches und allgemeines Verfahren beim Umgang mit Deltafunktionen und anderen Distributionen.

$$\begin{aligned} \int dr F(r) [a(r)\delta(r-r_0) + b(r)\partial_r\delta(r-r_0)] &= \int dr F(r)\delta(r-r_0) \\ F(r_0)a(r_0) + \int dr [F(r)b(r)\partial_r\delta(r-r_0)] &= F(r_0) \\ &\quad F(r_0)a(r_0) \\ + \int dr [\partial_r(F(r)b(r)\delta(r-r_0)) - \delta(r-r_0)\partial_r(F(r)b(r))] &= F(r_0) \\ F(r_0)a(r_0) - \partial_r|_{r_0}(F(r)b(r)) &= F(r_0) \\ F(r_0)a(r_0) - b(r)\partial_r F(r_0) - F(r)\partial_r b(r_0) &= F(r_0) \\ F(r_0)[a(r_0) - \partial_r b(r_0) - 1] + (\partial_r F) b(r_0) &= 0 \end{aligned}$$

Da die Funktion  $F(r)$  beliebig ist, müssen die Vorfaktoren vom Wert von  $F$  als auch von seiner Ableitung gemeinsam verschwinden. Wir erhalten also aus Gl. 5.35 die folgenden beiden Gleichungen,

$$0 = a(r_0) - \partial_r b(r_0) - 1 \quad (5.38)$$

$$0 = b(r_0) \quad (5.39)$$

aus denen wir die Konstanten  $A$  und  $B$  ermitteln können.

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Gl. 5.39}}{=} b(r_0) \stackrel{\text{Gl. 5.37}}{=} Br_0^{-\ell-1} - Ar_0^\ell \\ \Rightarrow B &= Ar_0^{2\ell+1} \\ 0 &\stackrel{\text{Gl. 5.38}}{=} a(r_0) - \partial_r b(r_0) - 1 \\ &\stackrel{\text{Gl. 5.36, 5.37}}{=} (-2\ell Br_0^{-\ell-2} - 2(\ell+1)Ar_0^\ell) - (-(\ell+1)Br_0^{-\ell-2} - \ell Ar_0^{\ell-1}) - 1 \\ &= (-(\ell-1)Br_0^{-\ell-2} - (\ell+2)Ar_0^{\ell-1}) - 1 \\ &\stackrel{B=Ar_0^{2\ell+1}}{=} (-(\ell-1)Ar_0^{\ell-1} - (\ell+2)Ar_0^{\ell-1}) - 1 \\ &= -(2\ell+1)Ar_0^{\ell-1} - 1 \\ \Rightarrow A &= \frac{-1}{2\ell+1} r_0^{-\ell+1} \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{2\ell+1} r_0^{-\ell+1} \\ B &= \frac{-1}{2\ell+1} r_0^{\ell+2} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in den Ansatz Gl. 5.33 für die Greensfunktion erhalten wir die radiale Greensfunktion



## RADIALE GREENSFUNKTION DER POISSONGLEICHUNG

Die radiale Greensfunktion der Poissongleichung, welche durch die Differentialgleichung Gl. 5.31 definiert ist, lautet

$$G_{\ell,m}(r, r_0) = \frac{-r_0^2}{2\ell+1} \left[ \frac{r^\ell}{r_0^{\ell+1}} \underbrace{\theta(r_0 - r)}_{[1-\theta(r-r_0)]} + \frac{r_0^\ell}{r^{\ell+1}} \theta(r - r_0) \right] \quad (5.40)$$

Mit Hilfe der radialen Greensfunktion erhält man die Lösung der Poissongleichung mittels Gl. 5.32.

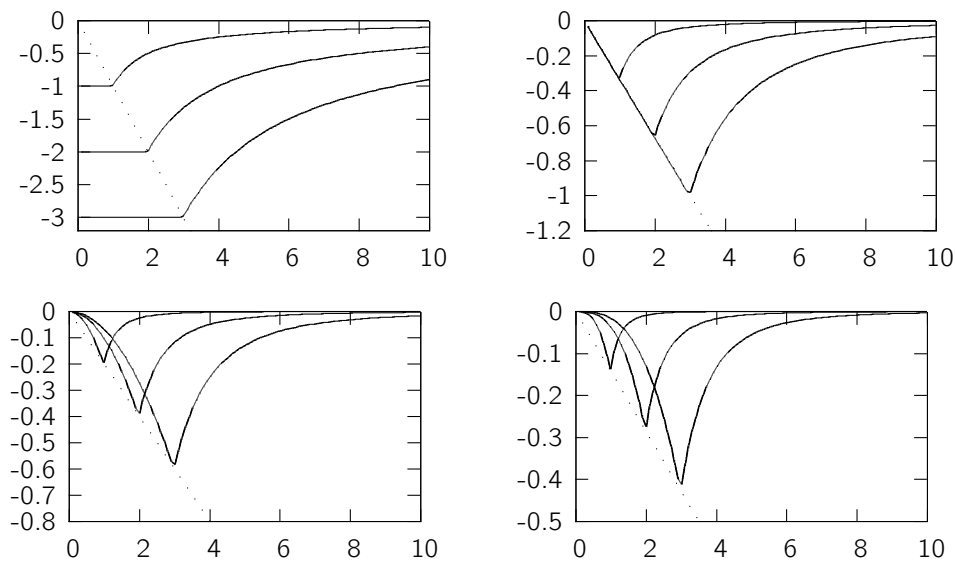


Abb. 5.7: Radiale Greensfunktion der Laplace Gleichung für  $\ell = 0, 1, 2, 3$ . The Greensfunctions are shown for  $r_0 = 1, 2, 3$ .

**Zusatz: Einfachere Herleitung**

Kennt man die Teillösungen der homogenen Differentialgleichung, kann man sich die Greensfunktion auch wie folgt bestimmen. Dies ist eigentlich keine Herleitung im strengen Sinn, weil wir einige Annahmen hineinstecken ohne sie wirklich zu begründen. Allerdings kann man sich diese Annahmen einfach merken, sodass diese Ableitung als Gedankenstütze nützlich nützlich ist.

Innerhalb von  $r_0$  muss die Greensfunktion mit der regulären Lösung der Laplacegleichung übereinstimmen. Diese sei als  $r^\ell$  bekannt. Außerhalb von  $r_0$  muss die mit der Lösung übereinstimmen die im Unendlichen verschwindet. Diese ist als  $r^{-\ell-1}$  bekannt. Jetzt nehmen wir an, dass die Greensfunktion stetig ist.

$$G(r, r_0) = C \begin{cases} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\ell & \text{für } r < r_0 \\ \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\ell-1} & \text{für } r > r_0 \end{cases} \quad (5.41)$$

Es muss also nur noch die Konstante  $C$  bestimmt werden.

Hierzu integrieren wir die Gleichung für die radiale Greensfunktion, nachdem wir sie mit  $r$  multipliziert haben, über ein infinitesimales Intervall, welches  $r_0$  einschließt.

$$\int_{r_0-\lambda}^{r_0+\lambda} dr \left( \partial_r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) r G_{\ell,m}(r, r_0) = \underbrace{\int_{r_0-\lambda}^{r_0+\lambda} dr r \delta(r - r_0)}_{r_0}$$

Nun nehmen wir an, dass die Greensfunktion beschränkt ist, sodass das Integral des zweiten Terms auf der linken Seite der Gleichung über das infinitesimale Intervall verschwindet, wenn  $\lambda$  gegen Null geht.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{r_0-\lambda}^{r_0+\lambda} dr \partial_r^2 r G_{\ell,m}(r, r_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \partial_r \left( r G_{\ell,m}(r, r_0) \right) \right]_{r_0-\lambda}^{r_0+\lambda} = r_0$$

Indem wir den Ansatz für die radiale Greensfunktion Gl. 5.41 einsetzen, erhalten wir den Wert von  $C$ .

$$\begin{aligned} r_0 &= \partial_r|_{r_0} \left[ r C \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\ell-1} \right] - \partial_r|_{r_0} \left[ r C \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\ell} \right] \\ &= C(-\ell-1) - C\ell = -(2\ell+1)C \\ \Rightarrow C &= -\frac{r_0}{2\ell+2} \end{aligned}$$

Einsetzen von  $C$  in den Ansatz Gl. 5.41 liefert das erwünschte Resultat, das mit Gl. 5.40 identisch ist.

### Potential in einer Darstellung von Kugelflächenfunktionen

Schließlich können wir das Potential mit Hilfe der radialen Greensfunktion Gl. 5.40 bestimmen, indem wir sie in Gl. 5.32 einsetzen.

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \sum_{\ell,m} \left[ \int dr' G_{\ell,m}(|\vec{r}|, r') \left( -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\ell,m}(r') \right) \right] Y_{\ell,m}(\vec{r}) \\ &= \sum_{\ell,m} \frac{1}{(2\ell+1)\epsilon_0} \left\{ \int dr_0 r_0^2 \left[ \frac{r^\ell}{r_0^{\ell+1}} \underbrace{\theta(r_0 - r)}_{1-\theta(r-r_0)} + \frac{r_0^\ell}{r^{\ell+1}} \theta(r - r_0) \right] \rho_{\ell,m}(r_0) \right\} Y_{\ell,m}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Wir erhalten also

POTENTIAL DURCH DIE RADIALKOMPONENTEN DER LADUNGSDICHTE AUSGEDRÜCKT

Für eine Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} \rho_{\ell,m}(|\vec{r}|) Y_{\ell,m}(\vec{r})$$

ist das elektrische Potential

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell,m} \frac{4\pi}{(2\ell+1)} Y_{\ell,m}(\vec{r}) \left\{ r^\ell \int_r^\infty dr_0 r_0^2 r_0^{-\ell-1} \rho_{\ell,m}(r_0) \right. \\ &\quad \left. + r^{-\ell-1} \int_0^r dr_0 r_0^2 r_0^\ell \rho_{\ell,m}(r_0) \right\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

## 5.9 Aufgaben

### 5.9.1 Feld einer polarisierten Hohlkugel

Skizze: Bestimme das elektrische Potential und das Feld in einer Hohlkugel, dessen Ladungsdichte in Polarkoordinaten durch  $\rho(r, \theta, \phi) = \delta(r - r_0) \sin(\theta)$  gegeben ist. Verwende Kugelflächenfunktionen.

### 5.9.2 Elektrische Feldgradienten

Skizze: Gebe wasserstoffähnliche Wellenfunktionen vor. Daraus soll die Dichte in Kugelflächenfunktionen bestimmt werden (Gaunt Koeffizienten vorgeben und erklären). Danach soll der  $d$ -Anteil des Potential am Kernort bestimmt werden. Aus dem Potential kann die Energie eines Kerns mit einem Quadrupolmoment also Funktion seiner Orientierung bestimmt werden.

Vergleiche das mit dem Effekt eines Punktladungsmodells.

### 5.9.3 Van der Waals Wechselwirkung

In einem Molekül oder einem Festkörper sind die Atome durch ionische oder kovalente chemische Bindungen zusammengehalten. Zwischen Atomen, die keine chemische Bindung untereinander bilden, wirken immer noch schwache Kräfte, die entweder elektrostatisch sind, ähnlich zur ionischen Bindung, oder Wasserstoffbrücken, die einer schwachen kovalent-ionischen Bindung entsprechen oder auf die Van der Waals Wechselwirkung zurückzuführen sind.

Edelgase zum Beispiel bilden keine anderen Bindungen aus, sodass sich ihre Wechselwirkung ausschließlich auf die Van-der-Waals Wechselwirkung beschränkt. Daher ist der Grund, warum sich Edelgase bei tiefen Temperaturen verflüssigen, die Van der Waals Wechselwirkung. Die Van der Waals Wechselwirkung spielt in der Chemie (nichtpolare Lösungsmittel) und der Biochemie (Proteinen) eine wichtige Rolle. Obwohl die Van der Waals Wechselwirkung sehr schwach ist, kann sie dominieren, wenn die Anzahl der Wechselwirkungen viel grösser als die von stärkeren Bindungen sind.

Die Van-der-Waals Wechselwirkung hat ihren Ursprung in einem quantenmechanischen Effekt, der Nullpunktsschwingung. Aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation schwingt die Elektronenschale immer ein wenig um den Atomkern, sodass sich dabei ein kleiner elektrostatischer Dipol herausbildet, der mit der Zeit fluktuiert. Aufgrund der elektrostatischen Wechselwirkung der Dipole synchronisieren sich die Dipole von zwei Atomen, was zu einer effektiven Anziehung zwischen den Atomen führt. Das effektive Wechselwirkungspotential fällt mit dem Abstand (im Grenzfall grosser Abstände) mit der sechsten Ordnung ab. In dieser Aufgabe wollen wir den entsprechenden Term in einem Modell bestimmen.

Wir betrachten dazu ein Atom zunächst als klassischen harmonischen Oszillator, der beschreibt, wie die Elektronenschale um den ortsfesten Atomrumpf schwingt. Sei  $\vec{u}$  die Auslenkung des Ladungszentrums der Elektronenschale. Die Elektronenschale habe die Ladung  $q$ . Die Elektronenschale werde der Einfachheit halber als Punktladung betrachtet. In Abwesenheit von elektrischen Feldern sei die potentielle Energie des Atoms  $E_{pot}(\vec{u}) = \frac{1}{2} c \vec{u}^2$ , wobei  $c$  eine Kraftkonstante ist. Die Elektronenschale habe eine Masse  $m$ .

1) Stelle die Lagrangefunktion für die Bewegung des Zentrums der Elektronenschale eines isolierten Atoms in einem elektrischen Feld auf, und drücke diese durch das Dipolmoment  $\vec{p}$  und dessen Zeitableitung  $\dot{\vec{p}}$  aus. Es wird ausschließlich das Dipolmoment berücksichtigt und die Ladungsverteilung des Atoms wird deshalb als Punktdipol aufgefasst. Bestimme nun die Bewegungsgleichung für das Dipolmoment.

2) Es sei die Anregungsfrequenz  $\omega_0$  des Atoms und die Polarisierbarkeit  $\alpha$  gegeben. Die Polarisierbarkeit ist durch die Gleichung  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$  definiert, wobei  $\vec{p}$  das statische Dipolmoment des Atoms in einem externen magnetischen Feld ist. Führe Kraftkonstante  $c$ , und die Masse  $m$  mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 1 auf die beiden Parameter  $\omega_0$  und  $\alpha$  zurück.

3) Bestimme die elektrostatische Wechselwirkungsenergie  $V(\vec{R}, \vec{p}_1, \vec{p}_2)$  von zwei Dipolen  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$ , deren relative Position  $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  ist.

4) Stelle nun die Lagrangefunktion für das System von zwei polarisierbaren Atomen auf, die über ihre induzierten Dipole elektrostatisch miteinander Wechselwirken. (Es wirken keine äusseren elektrischen Felder.) Dabei sei  $\vec{R}$  beliebig aber fest. Zeige, dass die Lagrangefunktion der eines multidimensionalen harmonischen Oszillators entspricht.

5) Bestimme nun die Eigenfrequenzen des in 4) beschriebenen Systems. Der Einfachheit halber Wähle  $\vec{R}$  parallel zur z-Achse. Hinweis: Vertausche die Indizes so, dass die dynamische Matrix blockdiagonal wird, und aus mehreren zwei mal zwei Untermatrizen besteht.

Eine quantenmechanische Rechnung ergibt, dass die Energie des Systems im Grundzustand, der aber Nullpunktsschwingungen ausführt, durch

$$E(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \hbar \omega(\vec{R})$$

ist. Dabei ist  $n$  die Anzahl der Eigenmoden des Systems. Da die Wechselwirkung Bestimme daraus die Wechselwirkungsenergie  $E(\vec{R})$ . Dies ist die Van-der-Waals Wechselwirkung.

## Chapter 6

# Magnetostatik (4h)

### 6.1 Vektorpotential

#### 6.1.1 Das Vektorpotential

Die Maxwellgleichungen der Magnetostatik sind

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}\end{aligned}$$

In der Elektrostatik war die Einführung eines skalaren Potentials  $\Phi$  sehr hilfreich. Dadurch konnten wir uns auf nur eine der beiden Maxwellgleichungen beschränken, welche dann die Form der Poissongleichung annahm. In der Magnetostatik können wir einen ähnlichen Trick anwenden.

Erinnern wir uns an die Schritte, die uns zum skalaren Potential führten.

1. Eine der beiden Maxwellgleichungen der Elektrostatik war  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ . Diese Gleichung ist unabhängig von Ladungen und Strömen.
2. Wir nutzen die Identität  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$ , die besagt, dass die Rotation jedes beliebigen Gradientenfeldes verschwindet. Durch den Ansatz  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$  ist dadurch die obige Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  automatisch erfüllt.
3. Nun ersetzen wir das elektrische Feld in der ersten Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$  durch den Gradienten der skalaren Potentials  $\Phi$  und erhalten die Poissongleichung  $\vec{\nabla}^2 \Phi = -\rho / \epsilon_0$ .

In der Magnetostatik gehen wir analog vor:

1. Die Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  ist unabhängig von Ladungen und Strömen.
2. Wir nutzen die Identität  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , die sagt, dass die Divergenz des Rotationsfeldes eines beliebigen Vektorfeldes verschwindet. Mit dem Ansatz  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  wird die Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  automatisch erfüllt.
3. Nun ersetzen wir das magnetische Feld in der letzten Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$  durch die Rotation des Vektorpotentials  $\vec{A}$  und erhalten eine Differentialgleichung für  $\vec{A}$ .



Abb. 6.1: Jean-Baptiste Biot, 1774-1862

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right) = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \\ &\stackrel{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}{=} \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}} \stackrel{!}{=} \vec{j}\end{aligned}$$

Wir erhalten also aus den Maxwellgleichungen eine Gleichung für das vektorpotential, welche den magnetischen Partner der Poissongleichung darstellt.

#### DIFFERENTIALGLEICHUNG FÜR DAS STATISCHE VEKTORPOTENTIAL

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j} \quad (6.1)$$

Auf diese Weise wurden die beiden Maxwellgleichungen auf eine Differentialgleichung, Gl. 6.1, für das Vektorpotential  $\vec{A}$  und eine Gleichung, Gl. 6.2, welche für ein gegebenes Vektorpotential das magnetische Feld liefert.

#### Definition 6.1 VEKTORPOTENTIAL

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (6.2)$$

### 6.1.2 Vektorpotential einer Stromdichteverteilung

Wie bestimmen wir das Vektorpotential einer Stromverteilung? Wir beginnen mit Gl. 6.1:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}$$

In Analogie zum Ausdruck Gl. 4.7 für das skalare Potential versuchen wir einen entsprechenden Ansatz für das Vektorpotential.

#### VEKTORPOTENTIAL EINER STATISCHEN STROMDICHTEVERTEILUNG

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.3)$$

Wir überprüfen den Ansatz Gl. 6.3, indem wir ihn in Gl. 6.1 einsetzen:

1.

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \stackrel{\text{Gl. E.1}}{=} -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

2.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3 r' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left[ \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\
&\stackrel{\text{part. Int.}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3 r' \left[ \vec{\nabla}' \left( \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') \right] \\
&\stackrel{\text{Gauß}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial\Omega} d\vec{A}' \left( \underbrace{\vec{j}(\vec{r}')}_{=0 \text{ für } r' \in \partial\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3 r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}')}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, wenn die Stromdichte ganz im Integrationsvolumen lokalisiert ist, sodass  $\vec{j}(r \in \partial\Omega) = 0$ . Der zweite Term verschwindet, weil die Ladungsdichten in der Magnetostatik zeitlich konstant sind, d.h.  $\partial_t \rho = 0$ . Wegen der Ladungserhaltung  $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ , verschwindet deshalb die Divergenz der Stromdichte.

Durch Zusammenfügen der beiden Terme sehen wir, dass der Ansatz Gl. 6.3 eine Lösung ist. Dabei muss aber die Voraussetzung gelten, dass die Stromdichte im Unendlichen verschwindet.

## 6.2 Gesetz von Biot und Savart

Nun können wir aus dem Vektorpotential das Magnetfeld ermitteln.

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \stackrel{\text{Gl. 6.3}}{=} \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}
\end{aligned}$$

Dies ist das Gesetz von Biot und Savart.

### GESETZ VON BIOT UND SAVART

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.4)$$

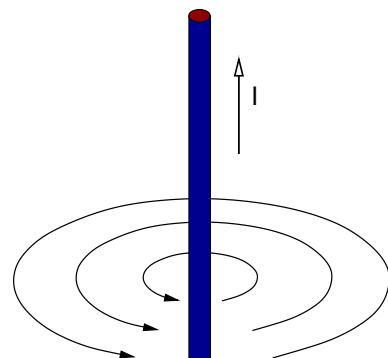
Das Gesetz von Biot und Savart bildete historisch die Grundlage der Magnetostatik, genauso wie das Coulombgesetz die Grundlage der Elektrostatik bildete.

### 6.2.1 Beispiel: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes

Um einen Einblick in die Anwendung des Gesetzes von Biot und Savart zu erhalten, untersuchen wir das Magnetfeld eines geraden stromdurchflossenen Drahtes.

Der Draht sei durch den Pfad

$$\vec{r}(s) = s \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$$



gegeben, wobei  $\vec{e}_z$  der Einheitsvektor in z-Richtung ist. Der Pfad verläuft also in z Richtung.

Wir bilden eine Ableitung, die wir noch benötigen werden.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun setzen wir die Stromdichte des Drahtes

$$\vec{j}(\vec{r}') \stackrel{\text{Gl. 2.11}}{=} I \int d\vec{r}'' \delta(\vec{r}' - \vec{r}'')$$

in das Gesetz von Biot und Savart ein

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &\stackrel{\text{Gl. 6.4}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' I \int d\vec{r}'' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') \end{aligned}$$

Durch Auflösen der  $\delta$ -Funktion erhalten wir einen Ausdruck für das Magnetfeld des stromdurchflossenen Drahtes.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{r}'' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int ds \frac{d\vec{r}''}{ds} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \quad (6.5)$$

Jetzt können wir den Verlauf des Drahtes, nämlich  $\vec{r}(s)$  einsetzen

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int ds \frac{d\vec{r}''}{ds} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - s \end{pmatrix} \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - s)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - s)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{|x^2 + y^2|^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{1}{\left(1 + \frac{(z-s)^2}{x^2 + y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Nun führen wir eine Variablentransformation von  $s$  nach  $\alpha$  durch

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \frac{s - z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow ds = \sqrt{x^2 + y^2} d\alpha \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Das Integral ist nicht ganz trivial zu bestimmen. Der Lösungsweg verwendet eine Variablentransformation  $\alpha =$



$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{|x^2 + y^2|} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (1 + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}}_{=2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi |x^2 + y^2|} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Betrag des Magnetfelds fällt also invers proportional mit dem Abstand von Draht ab. Das Magnetfeld steht senkrecht auf dem Draht und in der x-y Ebene. Die Feldlinien bilden also konzentrische Kreise um den Draht.

Das Resultat ist identisch mit dem von Gl. 3.24 auf S. 36. Der Vorteil der hier vorgestellten Herleitung ist, dass der Lösungsweg nicht auf Symmetrien zurückgreift, sondern auf beliebige Drähte anwendbar ist.

Bei dieser Aufgabe wurde die Annahme einer lokalisierten Stromverteilung verletzt, welche der Herleitung von Gl. 6.3 und damit dem Gesetz von Biot und Savart, Gl. 6.4, zugrunde liegt, welches hier verwendet wurde.

Um zu zeigen, dass das Resultat dennoch gültig ist, ersetzen wir den linearen Draht durch eine sehr große, kreisförmige, Leiterschleife. Wenn man zeigen kann, dass das Resultat im Grenzfall eines unendlichen Radius konvergiert, können wir unser Ergebnis akzeptieren. Wir erkennen, dass der Beitrag eines Leitersegmentes invers mit dem Abstand verschwindet. Für einen gegebenen Abstand von dem Leiter tritt der Rest der Leiterschleife in den Hintergrund, wenn der Radius anwächst.

## 6.3 Multipolentwicklung des Vektorpotentials

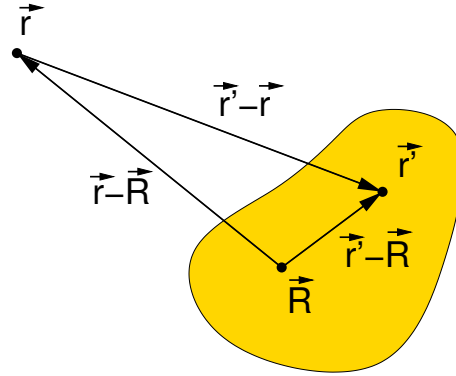
Nun sind wir am Fernfeld eines Magneten, bzw. einer Stromdichteverteilung interessiert, die in einem Bereich  $\Omega$  lokalisiert ist. Dafür setzen wir, wie in der Elektrostatik, eine Multipolentwicklung für die Stromdichte an. Wir beginnen mit dem bereits bekannten Ausdruck für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) \stackrel{\text{Gl. 6.3}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

---

$\sinh(x)$ . Wegen  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  gilt

$$\begin{aligned}\int d\alpha (1 + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} &= \int dx \cosh(x) \frac{1}{\cosh^3(x)} = \int dx \frac{1}{\cosh^2(x)} = \int dx \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \int dx [1 - \tanh^2(x)] = \tanh(x) \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (1 + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} &= \tanh(+\infty) - \tanh(-\infty) = 2\end{aligned}$$



Wiederum entwickeln wir den inversen Abstand gemäss Gl. 5.13 auf S. 61

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3} + O(r'^2)$$

und erhalten damit zunächst

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|} \left[ \int_{\Omega} d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \right] + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \left[ \int_{\Omega} d^3r' \vec{r}' \otimes \vec{j}(\vec{r}') \right] + \dots$$

was in Komponentenschreibweise die folgende Gleichung ergibt.

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|} \underbrace{\left[ \int_{\Omega} d^3r' j_i(\vec{r}') \right]}_{X_i} + \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{r_k}{|\vec{r}|^3} \underbrace{\left[ \int_{\Omega} d^3r' r'_k j_i(\vec{r}') \right]}_{Y_{k,i}} + \dots \quad (6.6)$$

Im Folgenden werden wir die Multipolmomente  $X_i$  und  $Y_{i,j}$  vereinfachen:

- Zunächst zeigen wir, dass der Monopol  $X_i$  in Gl. 6.6 verschwindet. Da die Stromdichte auf dem Rand des Bereichs  $\Omega$  verschwindet, gilt

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{\vec{j}(\vec{r} \in \partial\Omega) = 0}{=} \int_{\partial\Omega} d\vec{A} \cdot \vec{r}_{ij} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} \cdot (\vec{r}_{ij}) \\ = \int_{\Omega} d^3r \left[ \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}_{ij})}_{\vec{e}_i} + r_i \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j})}_{=0 \text{ wenn } \partial_t \rho = 0} \right] \end{aligned}$$

Im ersten Teil haben erhalten wir wegen  $\partial_i r_j = \delta_{i,j}$  den Einheitsvektor  $\vec{e}_i$ , der entlang der i-ten Koordinatenachse zeigt. Im zweiten Teil haben wir den Ladungserhaltungssatz  $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  angewandt. Da wir den statischen Fall betrachten, können wir eine zeitliche Änderung der Ladungsdichte ausschließen.

Mit  $\vec{e}_i \cdot \vec{j} = j_i$  erhalten wir also

$$0 = \int_{\Omega} d^3r j_i(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad X_i = 0$$

Die Monopolmomente der Stromdichte verschwinden also. Dies spiegelt gerade die Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  wieder, die besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt.

- Für den Dipol  $Y_{k,i}$  in Gl. 6.6 betrachten wir das Integral

$$\begin{aligned}
 0 \stackrel{\vec{r} \in \partial\Omega = 0}{=} & \int_{\partial\Omega} d\vec{A} r_i r_k \vec{j} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\Omega} d^3 r \vec{\nabla} (r_i r_k \vec{j}) \\
 = & \int_{\Omega} d^3 r \left[ \underbrace{(\vec{\nabla} r_i)}_{\vec{e}_i} r_k \vec{j} + r_i \underbrace{(\vec{\nabla} r_k)}_{\vec{e}_k} \vec{j} + r_i r_k \underbrace{(\vec{\nabla} \vec{j})}_{=0 \text{ wenn } \partial_t \rho = 0} \right] \\
 = & \int_{\Omega} d^3 r [\vec{e}_i r_k \vec{j} + r_i \vec{e}_k \vec{j}] = \int_{\Omega} d^3 r [r_{kj} \vec{e}_i + r_{ij} \vec{e}_k] \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Dieses Zwischenresultat nutzen wir im nächsten Schritt für die Auswertung des Dipolmoments

$$\begin{aligned}
 Y_{i,k} &= \underbrace{\int_{\Omega} d^3 r r_{ijk}}_{Y_{i,k}} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\Omega} d^3 r [r_{kj} \vec{e}_i + r_{ij} \vec{e}_k]}_{=0 \text{ (Gl. 6.7)}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3 r [r_{jk} \vec{e}_i - r_{kj} \vec{e}_i] \\
 \Rightarrow \mathbf{Y} &\triangleq \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3 r \begin{pmatrix} 0 & xj_y - yj_x & xj_z - zj_x \\ yj_x - xj_y & 0 & yj_z - zj_y \\ zj_x - xj_z & zj_y - yj_z & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3 r \begin{pmatrix} 0 & (\vec{r} \times \vec{j})_z & -(\vec{r} \times \vec{j})_y \\ -(\vec{r} \times \vec{j})_z & 0 & (\vec{r} \times \vec{j})_x \\ (\vec{r} \times \vec{j})_y & -(\vec{r} \times \vec{j})_x & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Dipolmomente lassen sich also durch drei unabhängige Größen, die wir zu einem Vektor  $\vec{m}$  zusammenfassen, den wir das magnetische Moment der Stromdichteverteilung nennen.

**Definition 6.2 MAGNETISCHES MOMENT**

Das magnetische Moment  $\vec{m}$  einer Stromdichteverteilung ist

$$\vec{m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3 r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \quad (6.8)$$

Das magnetische Moment ist ein Pseudovektor. Ein richtiger Vektor kehrt sein Vorzeichen unter Rauminversion (Punktspiegelung). Ein Pseudovektor behält sein Vorzeichen bei. Dass das magnetische Moment die Eigenschaft eines Pseudovektors hat, ergibt sich direkt aus der obigen Definition.

Mit dem magnetischen Moment erhalten wir also

$$Y_{i,k} = \int_{\Omega} d^3 r r_{ijk} \triangleq \int_{\Omega} d^3 r \vec{r} \otimes \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 & m_z & -m_y \\ -m_z & 0 & m_x \\ m_y & -m_x & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der Monopolmomente, die verschwinden, und der Dipolmomente in die Multipolentwicklung Gl. 6.6 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \begin{pmatrix} 0 & m_z & -m_y \\ -m_z & 0 & m_x \\ m_y & -m_x & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|^3} \begin{pmatrix} zm_y - ym_z \\ xm_z - zm_x \\ ym_x - xm_y \end{pmatrix} + \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \dots
 \end{aligned}$$

Das Fernfeld einer lokalisierten Stromverteilung enthält also keinen Monopolbeitrag und beginnt mit dem Dipolbeitrag

#### VEKTORPOTENTIAL EINES MAGNETISCHEN MOMENTS

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \dots \quad (6.9)$$

wobei die Größe  $\vec{m}$  das **magnetische Moment** ist.

## 6.4 Magnetisches Moment

Um uns mit der Bedeutung des magnetischen Moments vertraut zu machen, werden wir das magnetische Moment nun mit zwei einfachen Modellsystemen in Verbindung bringen

### 6.4.1 Beispiel: Magnetisches Moment einer kreisförmigen Leiterschleife

Wir betrachten das magnetische Moment einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius  $R$  in der x-y Ebene.

Zunächst bestimmen wir die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \oint d\vec{r}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') = I \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\vec{r}'}{d\phi} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(\phi))$$

wobei der Draht durch den Pfad

$$\vec{r}'(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos(\phi) \\ R \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{d\phi} = \begin{pmatrix} -R \sin(\phi) \\ R \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Das magnetische Moment bestimmen wir gemäß der Definition Gl. 6.8

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \int d^3r \vec{r} \times \underbrace{\left[ I \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\vec{r}'}{d\phi} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(\phi)) \right]}_{\vec{j}(\vec{r})} \\ &= \frac{I}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \left[ \int d^3r \vec{r} \times \frac{d\vec{r}'}{d\phi} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(\phi)) \right] \\ &= \frac{I}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \vec{r}'(\phi) \times \frac{d\vec{r}'}{d\phi} \\ &= \frac{I}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} R \cos(\phi) \\ R \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin(\phi) \\ R \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{I \pi R^2}_A \vec{e}_z \end{aligned}$$

wobei  $\vec{e}_z$  der Einheitsvektor in z-Richtung ist.

Das magnetische Moment einer kreisförmigen Leiterschleife ist also gerade der Strom multipliziert mit der eingeschlossenen Fläche.

### Magnetisches Moment einer allgemeinen Leiterschleife

Die Rechnung für die Leiterschleife hat gezeigt, dass das magnetische Moment proportional zum Strom und der von der Schleife eingeschlossenen Fläche ist. Dies ist ein allgemeines Resultat, wie wir hier zeigen werden.

$$\begin{aligned}
 \vec{m} &= \frac{1}{2} \int d^3r \, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3r \, \vec{r} \times \oint d\vec{r}' I \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\
 &= \frac{I}{2} \int d^3r \, \vec{r} \times \oint ds \frac{d\vec{r}'}{ds} \delta(\vec{r} - \vec{r}'(s)) \\
 &= \frac{I}{2} \oint ds \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{r}'}{ds}}_{2\vec{A}} \\
 &= I\vec{A}
 \end{aligned}$$

Das Integral ist gerade die Fläche der Leiterschleife, wenn sie auf die entsprechenden Koordinatenflächen projiziert wurde.

Interpretieren wir  $s$  als Zeit, dann ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{ds} \Delta s &= \frac{1}{2} \vec{r} \times \delta\vec{r} = \Delta\vec{A} \\
 \Rightarrow \int ds \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{ds} &= \int ds \frac{d\vec{A}}{ds} = \vec{A}
 \end{aligned}$$

das Flächenelement, welches der Fahrstrahl  $\vec{r}(s)$  in einem Zeitintervall  $\Delta s$  überstreicht. Integrieren wir nun  $\frac{d\vec{A}}{ds}$  über einen Umlauf, erhalten wir die entsprechend projizierte Fläche.

Dies ist auch der Grund warum man einen Elektromagneten durch Aufwickeln eines Drahtes zu einer Spule herstellt. Bei gleicher Fläche wird hierbei der umlaufende Strom mit der Anzahl der Windungen vervielfacht.

#### MAGNETISCHES MOMENT EINER LEITERSCHLEIFE

Das magnetische Moment einer Leiterschleife ist gleich dem Produkt aus Strom und eingeschlossener Fläche

$$\vec{m} = I\vec{A} \quad (6.10)$$

Durch Aufwickeln des Drahtes zu einer Spule wird der Strom und damit das magnetische Moment entsprechend der Anzahl der Windungen vervielfacht

## 6.4.2 Magnetfeld und Drehimpuls

Das magnetische Moment eines geladenen Körpers der sich um eine Achse dreht, kann direkt mit dem Drehimpuls in Beziehung gesetzt werden.

Zunächst betrachten wir das Drehmoment eines Teilchens, das sich auf der Bahn  $\vec{r}(t)$  bewegt. Beachte, dass dieses Problem nicht mehr stationär ist und damit den Rahmen der Magnetostatik

sprengt. Wir sehen einmal darüber hinweg. Als "Ausrede" stellen wir uns vor, dass viele Teilchen auf einer geschlossenen Bahn eine statische Stromdichte erzeugen. Anschließend teilen wir die Beiträge zum Magnetfeld wieder auf die einzelnen Teilchen auf.

Wir setzen die Stromdichte eines solchen Teilchens

$$\vec{j}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Gl. 2.8}}{=} q \frac{d\vec{r}}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$$

in die Definitionsgleichung des magnetischen Moments Gl. 6.8 ein

$$\begin{aligned} \vec{m}(t) &= \frac{1}{2} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t) = \frac{1}{2} \int d^3r' \vec{r}' \times q \frac{d\vec{r}}{dt} \delta(\vec{r}' - \vec{r}(t)) = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times q \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{q}{2m} \vec{r}(t) \times \underbrace{m \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{p}} = \frac{q}{2m} \underbrace{\vec{L}(t)}_{=\vec{r} \times \vec{p}} \end{aligned}$$

wobei  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  der (kinetische<sup>2</sup>) Drehimpuls des Teilchens ist.

#### MAGNETISCHES MOMENT EINER ROTIERENDEN LADUNG

Eine Punktladung mit Ladung  $q$  und Masse  $m$ , die mit einem Drehimpuls  $\vec{L}$  um eine Achse rotiert, erzeugt ein magnetisches Moment

$$\vec{m} = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad (6.11)$$

Haben wir eine Verteilung von identische Elementarteilchen, dann lässt sich das Resultat direkt verallgemeinern.

$$\vec{m}_{ges} = \sum_n \vec{m}'_n = \sum_n \frac{q}{2m} \vec{L}'_n = \frac{q}{2m} \sum_n \vec{L}'_n = \frac{q}{2m} \vec{L}_{ges}$$

Wobei das gesamte magnetische Moment  $\vec{m}_{ges} = \sum_n \vec{m}'_n$  die Summe der Beiträge der einzelnen Teilchen ist und der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}_{ges} = \sum_n \vec{L}'_n$  aus den Einzelbeiträgen  $\vec{L}'_n$  aufgebaut ist. Für eine Verteilung von Teilchen mit gleichem Wert für  $q/(2m)$  gilt also derselbe Zusammenhang zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls, wie für eine einzelne rotierende Ladung.

#### Definition 6.3 GYROMAGNETISCHES VERHÄLTNISS UND G-FAKTOR

Das **gyromagnetische Verhältnis**<sup>a</sup> ist das Verhältnis von magnetischem Moment und dem Drehimpuls

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{m} \cdot \vec{L}}{L^2} \quad \left( \approx \frac{|\vec{m}|}{|\vec{L}|} \right)$$

Das gyromagnetische Verhältnis ist meistens, aber nicht immer, direkt über Gl. 6.11 mit der Ladung und Masse des Körpers verknüpft. Deshalb führt man den **g-Faktor**  $g$  ein

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma}{\frac{q}{2m}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = g \frac{q}{2m} \quad (6.12)$$

<sup>a</sup>engl.: gyromagnetic ratio, magnetogyric ratio

Der  $g$  Faktor weicht zum Beispiel von Eins ab, wenn der Körper aus unterschiedliche Teilchen, z.B.

<sup>2</sup>Beachte, dass  $\vec{p} = m\vec{v}$  der kinetische Impuls ist, der sich vom kanonischen Impuls unterscheiden kann. Der kanonische Impuls ist die Ableitung  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}$  der Lagrangefunktion  $\mathcal{L}$ . Entsprechen sollte man den kanonischen Drehimpuls vom kinetischen Drehimpuls unterscheiden.

Elektronen und Atomkernen, zusammengesetzt ist. Abweichungen entstehen auch durch andere Effekte.

Das Elektron hat einen  $g$ -Faktor, der stark von Eins abweicht: Ein freies Elektron besitzt einen Eigendrehimpuls, den **Spin**. Der Spin eines Elektrons kann nur die Werte  $+\hbar/2$  und  $-\hbar/2$  annehmen, wie in der Quantenmechanik gezeigt wird. Der  **$g$ -Faktor des Elektrons** ist sehr groß und beträgt  $g \approx 2.002$ . Der Wert  $g = 2$  folgt unmittelbar aus der Diracgleichung, der relativistischen Wellengleichung für quantenmechanische Elektronen. Sein Ursprung liegt also in relativistischen Effekten und nicht in darin, dass sich Massen und Ladungsdichte unterscheiden. Die Korrektur zu dem Wert  $g = 2$  erhält man indem man auch das elektromagnetische Feld quantisiert, was  $\frac{\alpha}{\pi} + O(\alpha^2)$  zum  $g$ -Faktor des Elektrons beiträgt. Dabei ist  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx \frac{1}{137}$  die **Feinstrukturkonstante**.

#### Definition 6.4 BOHR MAGNETON

Das Bohr Magneton  $\mu_B$  ist

$$\mu_B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (6.13)$$

wobei  $e$  die Elementarladung,  $\hbar = 2\pi\hbar$  das Plancksche Wirkungsquantum<sup>a</sup> und  $m_e$  die Elektronenmasse ist.

Das Bohr Magneton wird häufig als Einheit eines magnetischen Moments verwendet. Das magnetische Moment  $\vec{\mu}_e$  des Elektrons<sup>b</sup> ist

$$|\vec{\mu}_e| = \frac{1}{2}g_e\mu_B \approx \mu_B$$

Dabei ist  $g_e$  der  $g$ -Faktor des Elektrons. Beachte, dass Spin und magnetisches Moment des Elektrons wegen seiner negativen Ladung in die entgegengesetzte Richtung sehen.

<sup>a</sup>Beachte, dass häufig auch  $\hbar$  als Plancksches Wirkungsquantum bezeichnet wird.

<sup>b</sup>Wir wählen hier ein alternatives Symbol für das magnetische Moment, um die Verwechslung mit der Elektronenmasse auszuschließen.

## 6.5 Magnetisierung

Wir wollen nun eine kontinuierliche Dichte von magnetischen Momenten einführen. Dazu stellen wir uns einen magnetischen Festkörper vor, der aus vielen magnetischen Atomen besteht. Jedes Atom spielt auf der makroskopischen Skala die Rolle eines Punktmagneten. Die Dichte der magnetischen Momente bezeichnet man als **Magnetisierung**. Die folgende Definition Gl. 6.14 wird ähnlich wie die der Ladungsdichte auf S. 16 und der Stromdichte auf S. 19 gebildet.

**Definition 6.5** *MAGNETISIERUNG*

Die Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r})$  eines Systems von Punktmagneten mit den Momenten  $\vec{m}_n$  ist

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \lim_{r_c \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_{r_c}|} \sum_{\vec{r}_n(t) \in \Omega_{r_c}} \vec{m}_n \quad (6.14)$$

Dabei ist  $\Omega_{r_c}$  eine am Ort  $\vec{r}$  zentrierte Kugel mit Radius  $r_c$  und dem Volumen  $|\Omega_{r_c}| = \frac{4\pi}{3} r_c^3$ . Die Summe erstreckt sich über alle magnetischen Momente mit den Momenten  $\vec{m}_n$  und Position  $\vec{r}_n(t)$ , die sich in der Kugel befinden.

Die Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r})$  eines Schwarms von Punktdipolen ist demnach

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_n \vec{m}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (6.15)$$

Das Vektorpotential, das durch diese Magnetisierung erzeugt wird, ist gemäß Gl. 6.9

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_n \frac{\vec{m}_n \times (\vec{r} - \vec{r}_n)}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \underbrace{\sum_n \vec{m}_n \delta(\vec{r}' - \vec{r}_n)}_{\vec{M}(\vec{r}')} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

Nun wollen wir der Magnetisierung eine Stromdichte zuordnen. Dieser Zusammenhang wird benötigt, um die Magnetisierung in den Maxwellgleichungen und der Lorentzkraft zu berücksichtigen. Die der Magnetisierung zugeordnete Stromdichteverteilung wird so gewählt, dass sie dasselbe Vektorpotential wie die Magnetisierung erzeugt. Dazu formen wir den obigen Ausdruck für das Vektorpotential der Magnetisierung um, indem wir die Identität  $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$  nutzen.

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \vec{M}(\vec{r}') \times \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \vec{M}(\vec{r}') \times \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left[ -\vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{(\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int d\vec{A}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=0, \text{ wenn } \vec{M}(\vec{r} \in \partial\Omega)=0} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{(\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, wenn wir über die Magnetisierung auf der Oberfläche des Volumens verschwindet. Dies gibt uns einen weiteren Ausdruck für das Vektorpotential einer Magnetisierung.



## VEKTORPOTENTIAL EINER MAGNETISIERUNG

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit Gl. 6.3. sehen wir, dass  $\vec{\nabla} \times \vec{M}$  die Rolle einer Stromdichteverteilung übernimmt. Eine Magnetisierung erzeugt also dasselbe magnetische Feld wie eine Stromdichteverteilung

$$\vec{j}_{mag}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}) \quad (6.16)$$

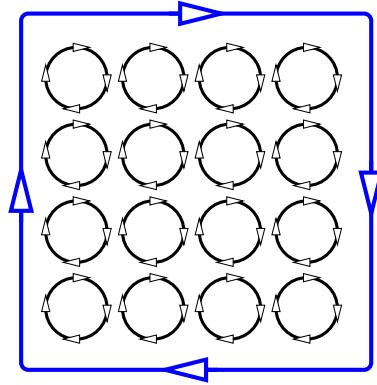


Abb. 6.2: Schematische Darstellung wie sich der Oberflächenstrom aus den Strömen der Einzelmomente zusammensetzt. Die effektive Stromdichte einer homogen magnetisierten Körpers ist auf der Oberfläche des Körpers lokalisiert.

Nun können wir die effektive Stromdichte eines Punktmagneten mit dem Moment  $\vec{m}_0$  am Ort  $\vec{r}_0$  bestimmen. Ein Punktmoment hat die Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{m}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ .

$$\vec{j}_{mag}(\vec{r}) \stackrel{\text{Gl. 6.16}}{=} \vec{\nabla} \times \vec{m}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = -\vec{m}_0 \times \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (6.17)$$

### 6.5.1 Energie eines magnetisches Moment im Magnetfeld

Betrachten wir nun die Energie eines magnetischen Moments in einem Magnetfeld. Dieser Ausdruck wird uns zeigen, wie sich ein Magnet in einem Magnetfeld ausrichtet, und erklärt damit die Funktionsweise einer Kompassnadel.

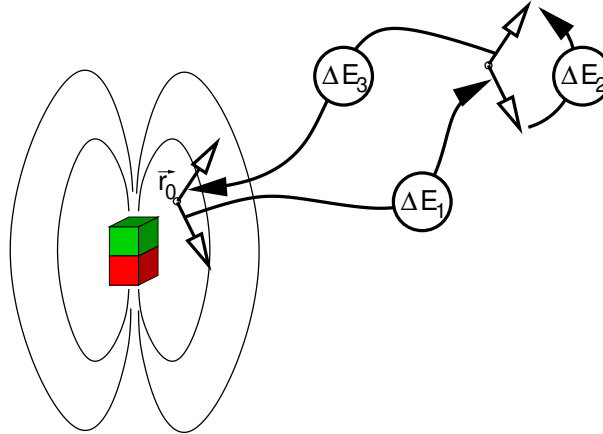
Zunächst bestimmen wir die Lorentzkraft Gl. 3.7 von S. 26 auf einen Punktmagneten (magnetis-

ches Moment).

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &\stackrel{\text{Gl. 3.7}}{=} \int d^3r \vec{j} \times \vec{B} = - \int d^3r \vec{B} \times \vec{j} \\
 &= - \int d^3r \vec{B} \times [-\vec{m}_0 \times \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] \\
 &\stackrel{\text{Gl. C.8}}{=} \int d^3r \left( \vec{B} \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right) \vec{m}_0 - \left( \vec{B} \vec{m}_0 \right) \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\
 &\stackrel{A \vec{\nabla} B = \vec{\nabla}(AB) - B \vec{\nabla} A}{=} \vec{m}_0 \int d^3r \left[ \left( \vec{\nabla} \vec{B} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \left( \vec{\nabla} \vec{B} \right) \right] \\
 &\quad - \int d^3r \left[ \vec{\nabla} \left( \vec{B} \vec{m}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{\nabla} \left( \vec{B} \vec{m}_0 \right) \right] \\
 &\stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \left[ \underbrace{\vec{m}_0 (\vec{\nabla} \vec{B})}_{=0} - \vec{\nabla} \left( \vec{B} \vec{m}_0 \right) \right] \\
 &= \vec{\nabla} \left( \vec{m}_0 \vec{B}(\vec{r}_0) \right) \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

Bei dieser Ableitung ist Vorsicht geboten, damit man mit den Klammern sowohl das Punktprodukt berücksichtigt als auch festlegt, worauf der Gradient wirkt. Das Integral über die Divergenz wurde mittels Gauß Theorem in ein Oberflächenintegral umgewandelt, welches verschwindet, solange das Volumen den Punktdipol umschließt.

Das Resultat von Gl. 6.18 legt es nahe eine potentielle Energie  $E_{pot}(\vec{r})$  zu definieren. Allerdings haben wir bei der Ableitung nur die Gesamtkraft auf ein magnetisches Moment fester Richtung bestimmt. Wir dürfen die potentielle Energie nicht ohne weiteres auf Prozesse übertragen, bei denen sich auch die Richtung des Moments ändert. Für diese Verallgemeinerung stellen wir folgende Überlegung an.



Ein Magnet wird parallel an den Rand des Universums verschoben, wo keine magnetischen Felder wirken. Die Arbeit  $\Delta E_1 = \vec{m}_0^{ini} \vec{B}(\infty) - \vec{m}_0^{ini} \vec{B}(\vec{r}_0)$ , die hierfür notwendig ist, kann mit unserer Formel bestimmt werden. Im Unendlichen wirken keine magnetischen Felder, d.h.  $\vec{B}(\infty) = 0$  und damit keine Kräfte auf den Magneten, sodass die Arbeit  $\Delta E_2 = \vec{m}_0^{fin} \vec{B}(\infty) - \vec{m}_0^{ini} \vec{B}(\infty)$ , die notwendig ist, um den Magneten zu drehen, verschwindet. Anschließend verschieben wir den Magneten parallel wieder an seinen ursprünglichen Ort und erhalten  $\Delta E_3 = \vec{m}_0^{fin} \vec{B}(\vec{r}_0) - \vec{m}_0^{fin} \vec{B}(\infty)$ . Um den Magneten zu drehen, erhalten wir also gerade den Unterschied der potentialen Energie  $\Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 = \vec{m}_0^{fin} \vec{B}(\vec{r}_0) - \vec{m}_0^{ini} \vec{B}(\vec{r}_0)$  für die unterschiedlichen Richtungen am selben Ort. Damit haben wir die potentielle Energie von reinen Verschiebungen auf Drehungen des Magneten verallgemeinert.

## POTENTIELLE ENERGIE EINES MAGNETEN IM MAGNETFELD

Die Energie eines Punktmagneten mit dem magnetischen Moment  $\vec{m}_0$  am Ort  $\vec{r}_0$  ist

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}_0) = -\vec{m}_0 \cdot \vec{B}(\vec{r}_0) \quad (6.19)$$

Auf einen Magneten wirkt im Magnetfeld die Kraft  $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}(\vec{r})$

Ein magnetisierter Körper hat im Magnetfeld die Energie

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int d^3r \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \quad (6.20)$$

Ein frei beweglicher Magnet wird daher immer von einem Magnetfeld angezogen und stellt sich dort parallel zum Magnetfeld ein, um seine Energie zu minimieren<sup>3</sup>. Das ist der Grund warum ein Magnet von einem paramagnetischen Metall angezogen wird. In einem paramagnetischen Metall sind die magnetischen Momente frei einstellbar.

Da das magnetische Moment mit einem Drehimpuls verknüpft, stellt sich auch der Drehimpuls parallel zum Magnetfeld ein.

$$\vec{m} = g \frac{q}{2m} \vec{L} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{pot}} = -g \frac{q}{2m} \vec{B} \cdot \vec{L}$$

Die Quantisierung des Drehimpulses  $L_z = \hbar m$  führt dazu, dass die Energieniveaus von Elektronen in einem Magnetfeld aufspalten

$$E_n = g \frac{e\hbar}{2m_e} |\vec{B}| m$$

### 6.5.2 Exkurs: Zeeman Effekt

Der Zeeman-effekt<sup>4</sup> beschreibt die Aufspaltung der quantenmechanischen Energieniveaus eines Atoms in einem externen Magnetfeld. Man unterscheidet den normalen Zeeman Effekt und den anomalen Zeeman Effekt.

In der Quantenmechanik werden wir sehen, dass ein Elektron in einem isolierten Atom nur diskrete Werte annehmen kann. Diese Zustände werden durch Quantenzahlen charakterisiert. Ein Satz von Quantenzahlen sind die Hauptquantenzahl  $n$ , die Nebenquantenzahl  $\ell$  und die magnetische Quantenzahl  $m$ . ( $m$  darf hier nicht mit Masse oder magnetischem Moment verwechselt werden.) Die Quantenzahlen  $(\ell, m)$  entsprechen direkt den Indizes der Kugelflächenfunktionen<sup>5</sup> und legen den Bahndrehimpuls des Elektrons fest. In jedem Zustand können sich maximal zwei Elektronen aufhalten, die einen entgegengesetzten Eigendrehimpuls, den Spin besitzen.

Der Bahndrehimpuls eines Teilchens kann nur diskrete Werte  $\hbar m$  annehmen kann, wobei  $m$  die **magnetische Drehimpulsquantenzahl** ist. In einem isolierten Atom ohne äußere Felder sind Zustände mit gleicher magnetischer Quantenzahl entartet, das heißt, sie besitzen dieselbe Energie.

Betrachten wir nun die Energie eines Elektrons in einem Magnetfeld. Durch seine Bahnbewegung erzeugt das Elektron ein magnetisches Moment, das proportional Gl. 6.11 zum Bahndrehimpuls des Elektrons ist, also  $\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$  mit der Elementarladung  $e$  und der Elektronenmasse  $m_e$ . In einem

<sup>3</sup>Dabei geht man davon aus, dass kinetische Energie dissipiert wird, sodass das System im Minimum der potentiellen Energie zu liegen kommt

<sup>4</sup>Pieter Zeeman, 1965-1943, Niederländischer Physiker, Nobelpreis Physik 1902 für die Entdeckung des nach ihm benannten Effekts. Zeeman entdeckte 1896, dass sich die Spektrallinien einer Lichtquelle im starken Magnetfeld in mehrere polarisierte Komponenten aufspalten. Dieses Phänomen, das als Zeeman-Effekt bezeichnet wird, bestätigt die elektromagnetische Theorie des Lichtes.

<sup>5</sup>Die Wellenfunktionen der Elektronen eines isolierten Atoms kann in ein Produkt einer Radialfunktion und einer Kugelflächenfunktion, welche die Winkelabhängigkeit beschreibt aufgespalten werden.

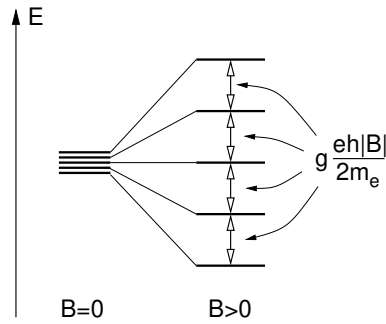


Abb. 6.3: Schematische Darstellung des Zeeman Effekts. Im Magnetfeld spaltet ein Multiplett von atomaren Zuständen mit gleicher Drehimpulsquantenzahl aber unterschiedlichen magnetischen Quantenzahlen  $m$  in equidistante Energiezustände auf. **Achtung! in der Abbildung sollte  $\hbar$  statt  $h$  stehen.**

Magnetfeld spalten diese Energieniveaus in ein Multiplett mit unterschiedlichen Energien auf.

$$\begin{aligned}
 E_{n,\ell,m}(|\vec{B}|) &= E_{n,\ell}(\vec{B} = 0) + \underbrace{\frac{e}{2m_e} \overbrace{\hbar m}^{L_z}}_{-\vec{m}} \vec{B}_z \\
 &= E_{n,\ell}(\vec{B} = 0) + \mu_B |\vec{B}| \cdot m
 \end{aligned}$$

Dies ist der **normale Zeemaneffekt**.

Während beim normalen Zeeman Effekt nur das magnetische Moment des Bahndrehimpulses berücksichtigt wird, wird beim **anormalen Zeeman Effekt** auch das Moment des Eigendrehimpulses  $\vec{S}$  des Elektrons, dem Spin des Elektrons, mit berücksichtigt. Betrachtet man das magnetische Moment von Bahn und Eigendrehimpuls des Elektrons erhalten wir

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} (g_e \vec{S} + \vec{L})$$

Dabei muss der g-Faktor des Elektrons  $g_e$  mitberücksichtigt werden. Jedoch eignet sich diese Darstellung nicht, weil Bahndrehimpuls und Elektronenspin sich nur vektoriell addieren. Die Drehimpulsquantenzahlen von Bahn- und Eigendrehimpuls sind keine Quantenzahlen mehr. Die weitere Behandlung erfordert eine störungstheoretische, quantenmechanische Rechnung, von der wir hier Abstand nehmen.

## 6.6 Das skalare magnetische Potential

Um das Magnetfeld eines Magneten mit gegebener Form zu bestimmen, gibt es eine spezielle Methode, die wir hier vorstellen möchten. Es kann ein skalares magnetisches Potential bestimmt werden, welches ganz analog zur Elektrostatik bestimmt werden kann.

Dazu betrachten wir die Maxwellgleichung im statischen Fall

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$$

Wir ersetzen  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  entsprechend der Zustandsgleichung und ersetzen die Stromdichte durch die effektive Stromdichte der Magnetisierung

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B} &= \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{M}}_{\vec{j}_{mag}} \\
 \vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right] &= 0
 \end{aligned}$$

## MAGNETISCHE ERREGUNG

Die Größe

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (6.21)$$

nennen wir wieder magnetische Erregung. Der Zusammenhang mit der Zustandsgleichung Gl. 3.6 wird in Kapitel 7.2 hergestellt.

Da die Rotation der magnetischen Erregung verschwindet, kann sie als Gradientenfeld eines skalaren Potentials dargestellt werden. Wir nennen dieses Potential **“magnetisches skalares Potential”**  $\Phi_M(\vec{r})$ .

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = -\vec{\nabla} \Phi_M \quad (6.22)$$

Eine Differentialgleichung für das magnetische Skalarpotential erhalten wir mit der Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

$$\vec{\nabla}^2 \Phi_M = -\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

Diese Gleichung hat die Form der Poissongleichung aus der Elektrostatik. Die Divergenz der Magnetisierung spielt also, bis auf das Vorzeichen, die Rolle einer effektiven magnetischen Ladungsdichte  $\rho_M$ .

## MAGNETISCHES SKALARES POTENTIAL UND MAGNETISCHE “LADUNGSDICHTE”

Das magnetische skalare Potential  $\Phi_M(\vec{r})$  erhält man für eine gegebene magnetische Ladungsdichte  $\rho_M(\vec{r})$

$$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (6.23)$$

durch

$$\vec{\nabla}^2 \Phi_M = -\rho_M \quad (6.24)$$

Die magnetische Erregung erhält man als Gradientenfeld des magnetischen skalaren Potentials, d.h.

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_M \quad (6.25)$$

Beachte, dass  $\rho_M$  keine wirkliche Ladungsdichte ist. Der Name entstand nur durch die Analogie von  $\nabla^2 \Phi_M = \rho_M$  mit der Poissongleichung und von  $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_M$  mit dem Zusammenhang  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$  des elektrostatischen Feldes mit dem elektrostatischen Potential.

Dies erlaubt es, alle Techniken für die Lösung der Poissongleichung direkt auf diese Fragestellung aus der Magnetostatik anzuwenden. Wir erhalten zum Beispiel

$$\Phi_M(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.26)$$

Das Magnetfeld  $\vec{B}$  erhält man durch Auflösen von Gl. 6.22

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &\stackrel{\text{Gl. 6.21}}{=} \mu_0 \left( \vec{H} + \vec{M} \right) \stackrel{\text{Gl. 6.25}}{=} \mu_0 \left( -\vec{\nabla} \Phi_M + \vec{M} \right) \\ &\stackrel{\text{Gl. 6.26}}{=} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3 r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Besonders geeignet ist die bisher beschriebene Vorgehensweise für die Bestimmung des Streufelds eines homogen magnetisierten Magneten. In diesem Fall liegt die "magnetische Ladung"  $\rho_M$  alleine auf der Oberfläche des Magneten. Ein quaderartiger Magnet lässt sich dann mit den Methoden für den Plattenkondensators behandeln.

Schließlich wollen wir noch einen geschlossenen Ausdruck für das Magnetfeld um einen Magneten finden.

$$\begin{aligned} B_i(\vec{r}) &= \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \partial_i \int d^3 r' (\partial'_k M_k(\vec{r}')) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \mu_0 M_i(\vec{r}) \\ &= \left[ -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \partial_i \int d^3 r' M_k(\vec{r}') \partial'_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \mu_0 M_i(\vec{r}) \\ &= \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \int d^3 r' M_k(\vec{r}') \partial_i \partial_k \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \mu_0 M_i(\vec{r}) \end{aligned}$$

Wir benötigen nun die zweiten Ableitungen von  $1/|\vec{r}|$ , was wegen der Polstelle nicht trivial ist. Um die Singularität zu vermeiden, bilden wir eine Funktionenfolge, welche gegen die gewünschte Funktion konvergiert, aber im ganzen Raum zweimal differenzierbar ist.

$$f_{r_c}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{r_c} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_c^2} \right] & \text{für } |\vec{r}| < r_c \\ \frac{1}{|\vec{r}|} & \text{für } |\vec{r}| > r_c \end{cases}$$

Für die Funktionen  $f_{r_c}$  dürfen wir nun die Ableitungen bilden und erhalten

$$\partial_i \partial_j f_{r_c}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{r_c^3} \delta_{ij} & \text{für } |\vec{r}| < r_c \\ \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} & \text{für } |\vec{r}| > r_c \end{cases}$$

Nun bilden wir den Grenzübergang  $r_c \rightarrow 0$  und erhalten das etwas überraschende Resultat, dass der Beitrag für  $r < r_c$ , nicht verschwindet, sondern eine  $\delta$ -Funktion ergibt.

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} - \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta(\vec{r})$$

Nun können wir dieses Zwischenresultat verwenden um das magnetische Feld zu bestimmen. Dabei fassen bringen wir den letzten Term,  $\mu_0 M_i$  des Ausdrucks für das magnetische Feld in das Integral und addieren ihm zum eben bestimmten  $\delta$ -Funktionsbeitrag.

$$B_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \int d^3 r' \left[ \frac{3(r_i - r'_i)(r_k - r'_k) - \delta_{ik}(\vec{r} - \vec{r}')^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} + \frac{8\pi}{3} \delta_{ik} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right] M_k(\vec{r}')$$

Hier haben wir wieder vorausgesetzt, dass die Magnetisierung in einem endlichen Bereich lokalisiert ist und die Magnetisierung auf der Oberfläche des Integrationsvolumens verschwindet.

## MAGNETFELD EINER MAGNETISIERUNG

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left[ \frac{3(\vec{r} - \vec{r}') \otimes (\vec{r} - \vec{r}') - \mathbf{1}(\vec{r} - \vec{r}')^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{1} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right] \vec{M}(\vec{r}') \quad (6.27)$$

Das magnetische Feld eines Punktmagneten erhalten wir durch Ersetzen der Magnetisierung durch  $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ .

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_0) \otimes (\vec{r} - \vec{r}_0) - \mathbf{1}(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^5} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{1} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right] \vec{m}_0 \quad (6.28)$$

Der erste Term ist analog zum elektrischen Feld um einen elektrischen Punktquadrupol. Der zweite Term darf aber nicht vergessen werden.

### 6.6.1 Exkurs: Magnetische Resonanz

Betrachten wir die Aufspaltungen der atomaren Energieniveaus in einem Magnetfeld, so haben wir bereits den **Zeeman Effekt** kennengelernt, der durch die Wechselwirkung des magnetischen Moments (Bahndrehimpuls und Spin) des Elektrons mit einem externen magnetischen Feld beschreibt.

Betrachten wir nun einen Elektronenzustand der mit einem Elektron besetzt ist. Der Spin des Elektrons kann entweder parallel oder antiparallel zum Magnetfeld stehen. In Abwesenheit eines Magnetfelds sind die beiden Zustände entartet. Bei angelegtem magnetischen Feld ist der Zustand mit dem Spin antiparallel zum Magnetfeld energetisch günstiger, während der andere Zustand in der Energie angehoben wird. Ist  $E_0$  die Energie des Zustands ohne Magnetfeld, so erhalten wir nun die beiden Energieniveaus

$$E(\vec{B}, s_z) = E_0 \pm \frac{1}{2} g_e \mu_B |\vec{B}|$$

Ist der Zustand in einem Festkörper oder einem Molekül eingebettet, dann kann das Magnetfeld von der Umgebung abgeschirmt werden. Dies führt zu einer Reduktion der Aufspaltung, die charakteristisch für den Zustand des Elektrons und seine Umgebung ist. Diese Absenkung der Energieniveaus beschreibt man durch einen **effektiven g-Faktor**, im Allgemeinen nur g-Faktor genannt. Der effektive g-Faktor erlaubt es Störstellen zu klassifizieren und die Winkelabhängigkeit des g-Faktors gibt einem darüber hinaus Hinweise über die Symmetrie des Elektronenzustands.

Die Bestimmung dieser Niveaus ist Gegenstand der **Elektronenspinresonanz** <sup>6</sup> (**ESR**) oder **Elektronenparamagnetischer resonance** <sup>7</sup> (**EPR**), die zuerst 1944 von Zavoisky <sup>8</sup> beobachtet wurde. Dabei wird ein Material in einem Magnetfeld mit Mikrowellen bestrahlt. Aus der Mikrowellenabsorption kann man die Abstände der Energieniveaus bestimmen. Die Elektronenspinresonanz wird zum Beispiel in Halbleitern und Isolatoren verwendet um Information über Störstellen zu erhalten. Ein weiteres Anwendungsfeld ist die Chemie und die Biochemie. Eine Voraussetzung für die ESR methode ist die Existenz eines halbgefüllten Elektronenzustands.

Diese Elektronenniveaus können weiter aufgespalten werden, wenn der Atomkern selbst einen Spin und damit ein magnetisches Moment besitzt. Je nachdem, ob der Kernspin parallel oder antiparallel

<sup>6</sup>engl.: Electron Spin resonance

<sup>7</sup>engl.: Electron paramagnetic resonance

<sup>8</sup>Evgenij Konstantinovic Zavojskij, (engl. Evgeny Konstantinovich Zavoisky), Russischer Physiker 1907-1976. Forschte seit 1926 an der Universität in Kasan und entdeckte dort 1944 die ESR-Spektroskopie. Das dortige Institut trägt seinen Namen. Inzwischen wird dort ihm zu Ehren der Sawoiski-Preis verliehen. (Sein Name wird auch Sawoiski geschrieben). Seine Arbeit blieb im Westen lange unbekannt.

zum Elektronenspin ausgerichtet ist, ergibt sich eine Energieabsenkung oder eine Energieanhebung. Man nennt die magnetische Wechselwirkung zwischen dem Atomkern und dem Elektron die **Hyperfeinwechselwirkung**. Die Hyperfeinwechselwirkung kann mittels **Kernspinresonanz (NMR)**<sup>9</sup> bestimmt werden. Solche Experimente werden genutzt, um Störstellen in Festkörpern zu charakterisieren, um ihre Symmetrie zu bestimmen und um etwas über ihre elektronischen Eigenschaften zu erfahren.

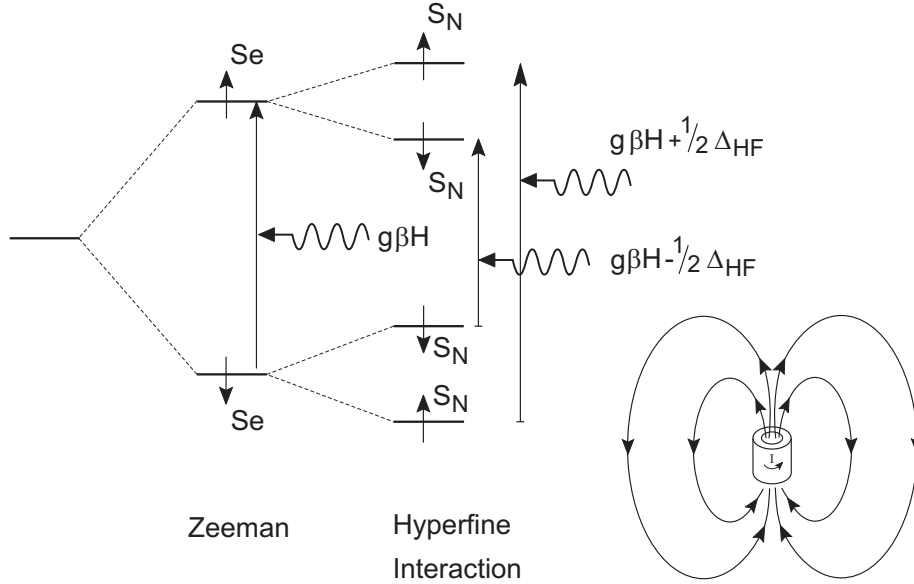


Abb. 6.4: Illustration zur Hyperfeinwechselwirkung

Eine quantenmechanischen Behandlung des Spins zeigt, dass der Spin eines Elektrons entlang einer Achse, z.B. die z-Richtung  $\vec{e}_z$ , nur die Werte  $\vec{S}\vec{e}_z = S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$  annehmen kann. In einem Magnetfeld richtet sich der Spin parallel oder antiparallel zum einem angelegten Magnetfeld aus. Das magnetische Moment eines Spins ist  $\vec{m} = g_e \mu_B \vec{S}_e$

Die Magnetisierung der Elektronen erhält man durch die Spindichte  $n_s(\vec{r})$  der Elektronen, der Differenz

$$n_s(\vec{r}) = n_{\uparrow}(\vec{r}) - n_{\downarrow}(\vec{r})$$

der Elektronendichte  $n_{\uparrow}(\vec{r})$  mit Spin parallel zum Magnetfeld und der Elektronendichte  $n_{\downarrow}(\vec{r})$  mit antiparallelem Spin.

Mit dem gyromagnetischen Verhältnis  $\gamma_e = -g_e \frac{e}{2m_e}$  des Elektrons und der Spindichte (Teilchen pro Volumen)  $n_s$  der Elektronen erhalten wir die Magnetisierung der Elektronen als

$$\vec{M}_e(\vec{r}) = \gamma_e \vec{S}_e n_s(\vec{r})$$

Dabei ist  $\vec{S}$  der Spin des Elektrons, der entlang einer Achse die Werte  $\pm \hbar/2$  annehmen kann.

Den Atomkern beschreiben wir als ein punktförmiges magnetisches Moment  $\vec{m}_{nuc} = \gamma_N \vec{S}_N$ , sodass seine Magnetisierung die Form

$$\vec{M}_n(\vec{r}) = \gamma_N \vec{S}_N \delta(\vec{r})$$

Dabei ist  $\gamma_N$  das gyromagnetische Verhältnis des Atomkerns und  $\vec{S}_N$  sein Drehimpuls, d.h. sein Spin. Der Einfachheit halber haben wir das Koordinatensystem so gewählt, dass sein Ursprung mit der Position des Atomkerns zusammenfällt.

<sup>9</sup>engl.: nuclear magnetic resonance



Die potentielle Energie der Elektronen im Magnetfeld des Atomkerns, dessen Position wir der Einfachheit halber in den Ursprung legen, ist

$$\begin{aligned}
 E &= - \int d^3r \vec{M}_e(\vec{r}) \vec{B}(\vec{r}) \\
 &= \int d^3r \int d^3r' \vec{M}_e(\vec{r}) \\
 &\quad \cdot \left[ -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{r}-\vec{r}') \otimes (\vec{r}-\vec{r}') - \mathbf{1}(\vec{r}-\vec{r}')^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{1}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \right) \right] \vec{M}_N(\vec{r}') \\
 &= \vec{S}_e \mathbf{A} \vec{S}_N
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Magnetisierungen mit Hilfe der gyromagnetischen Verhältnisse auf die Spins zurückgeführt.  $\mathbf{A}$  ist der sogenannte **Hyperfeintensor**, der die Spin-Spinwechselwirkung zwischen Elektronen und dem Atomkern beschreibt.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 \gamma_e \gamma_N}{4\pi} \int d^3r \int d^3r' \rho_s(\vec{r}) \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{3(\vec{r}-\vec{r}') \otimes (\vec{r}-\vec{r}') - \mathbf{1}(\vec{r}-\vec{r}')^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|^5} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{1}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \right] \delta(\vec{r}') \\
 &= -\frac{\mu_0 \gamma_e \gamma_N}{4\pi} \int d^3r \rho_s(\vec{r}) \left[ \frac{3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1}\vec{r}^2}{|\vec{r}|^5} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{1}\delta(\vec{r}) \right] \\
 &= \underbrace{-\frac{\mu_0 \gamma_e \gamma_N}{4\pi} \left[ \int d^3r \frac{3\vec{r} \otimes \vec{r} - \mathbf{1}\vec{r}^2}{|\vec{r}|^5} \rho_s(\vec{r}) \right]}_{\text{Anisotropie}} \quad \underbrace{-\frac{2\mu_0 \gamma_e \gamma_N}{3} \mathbf{1}\rho_s(\vec{0})}_{\text{Fermi Kontakt}}
 \end{aligned}$$

Seien nun beide Spins entlang dem Magnetfeld ausgerichtet, dessen Richtung durch den Einheitsvektor  $\vec{e}$  beschrieben wird. Der Elektronenspin kann sich nur parallel oder antiparallel zum Magnetfeld ausrichten, d.h.  $\vec{S}_e = \pm \frac{\hbar}{2} \vec{e}$ . Hat der Atomkern die Spinquantenzahl  $j$ , dann kann sein Spin in Richtung des Magnetfelds die Werte  $\vec{S}_N = \vec{e} \hbar j_z$  mit  $j_z = -j, -j+1, \dots, +j$  annehmen.

Je nach Richtung des Magnetfelds erhalten wir also die Energieniveaus

$$E_{\pm}(j_z) = E_0 \pm \frac{1}{2} g_e^{eff} \mu_B |\vec{B}| \pm \frac{\hbar^2}{2} [\vec{e} \mathbf{A} \vec{e}]_{j_z}$$

Den Abstand der Energieniveaus für unterschiedliche  $j_z$  nennt man **Hyperfeinaufspaltung**. Durch Bestimmung der Hyperfeinaufspaltung als Funktion der Richtung des externen Magnetfelds lässt sich der Hyperfeintensor ausmessen. Die Hyperfeinaufspaltung lässt sich vom Zeeman Term unterscheiden, weil die Hyperfeinaufspaltung, im Gegensatz zum Zeeman Term, nicht von der Stärke des Magnetfelds abhängt.

Bei einem Einkristall, kann man durch Drehen des externen Magnetfelds die Anisotropieaufspaltung von der Fermi Kontakt Aufspaltung unterscheiden. Mittelt man über alle Winkel, so hebt sich der Anisotropieterm weg und der Mittelwert ist die Fermi Kontakt Aufspaltung. Da nur die  $s$  Elektronen eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Atomkern besitzen, erhalten wir eine direkte Aussage über die Anzahl der  $s$ -Elektronen und damit über die Natur der Elektronenstruktur.

Die Winkelabhängigkeit liefert noch mehr Information über die Elektronenstruktur. Der Anisotropieterm hängt nur von dem Produkt der  $p$ -Wellenfunktionen und dem Produkt von  $s$ - und  $d$ -Elektronen ab, woraus wir wieder etwas über die Natur der Ladungsdichte erfahren. Wir können die Symmetrie der Störstelle (kugelsymmetrisch, axial, oder niedrigsymmetrisch) und sogar seine Ausrichtung relativ zum Kristallgitter bestimmen. Elektronenstrukturrechnungen von Störstellen[8, 9, 10] können anhand der Hyperfeinaufspaltung mit dem Experiment verglichen werden, um der Störstelle eindeutig eine Atomstruktur zuzuordnen.

Da nicht alle Atomkerne ein magnetisches Moment aufweisen[11], wird das Experiment durch Wahl geeigneter Isotope elementspezifisch gemacht werden.

Weitere Information zu Magnetischen Resonanz findet man in der Literatur[? 12], die aber Kenntnisse der Quantenmechanik voraussetzt.

## 6.7 Exkurs: Mikromagnetisches Modell

Das mikromagnetische Modell bildet die Grundlage für die Untersuchung von Magnetisierungskurven, sowie der Dynamik von Weisschen Bezirken. Ein besonderes spannendes Thema ist die Untersuchung von spontanen magnetischen Ordnungsstrukturen in Systemen mit kleinen Abmessungen.

Die Energie eines Magneten wird durch das mikromagnetische Modell beschrieben. Sie besteht aus den folgenden Termen

- Der Absolutbetrag der lokalen Magnetisierung wird über eine Zwangsbedingung identisch zur remanenten Magnetisierung  $M_s$  gesetzt.
- Die Austauschenergie (engl. exchange energy) hat die Form

$$E_{xc} = A \left( (\vec{\nabla} \vec{M}_x)^2 + (\vec{\nabla} \vec{M}_y)^2 + (\vec{\nabla} \vec{M}_z)^2 \right)$$

wobei man  $A$  die Austauschkonstante ist. Er beschreibt, dass sich die magnetischen Momente benachbarter magnetischer Atome parallel ausrichten möchten. Er leitet sich aus dem Term

$$E_{xc} = \sum_{i \neq j} t_{ij} \vec{m}(\vec{R}_i) \vec{m}(\vec{R}_j)$$

der die Wechselwirkung diskreter magnetischer Momente im sogenannte Heisenbergmodell beschreibt. Die Ursache der Austauschenergie ist kein magnetischer sondern liegt in der Elektronenstruktur.

- Kristallanisotropieenergie (engl: magnetocrystalline anisotropy): Durch einen relativistischen Effekt sind die Momente des Bahndrehimpulses und des Eigendrehimpulses gekoppelt. (Die rein magnetische Wechselwirkung ist vernachlässigbar. (**Editor: zu überprüfen!**)). Da die Elektronenbahnen durch die Kristallstruktur beeinflusst werden, richtet sich der Elektronenspin, der hauptsächlich für die Magnetisierung verantwortlich ist, entlang gewisser Kristallachsen aus. Ein kubischer Kristall ist symmetrisch bezüglich Drehung um  $90^\circ$  und bezüglich der Punktspiegelung. Deshalb muss auch die Anisotropieenergie diesen Symmetrien genügen. Für einen kubischen Kristall baut man die Anisotropieenergie aus zwei Funktionen auf

$$E_{aniso} = \int d^3r K_1 (M_1^2 M_2^2 + M_2^2 M_3^2 + M_3^2 M_1^2) + K_2 M_1^2 M_2^2 M_3^2$$

Für alle experimentell bestimmten Werte gilt  $K_2 \ll K_1$

- Die magnetostatische Selbstenergie hat die Form

$$E = -\frac{\mu_0}{2} \int d^3r \vec{M}(\vec{r}) \vec{H}_{demag}(\vec{r})$$

und wird mit der in Abschnitt 6.6 bestimmt. Dabei ist  $\vec{H}_{demag}$  das sogenannte Demagnetisierungsfeld, welches von der Magnetisierung selbst erzeugt wird. Dieses Feld ist vom extern angelegten Magnetfeld zu unterscheiden.

- Zeeman Energie: Die Energie der Magnetisierung im externen Magnetfeld (magnetische Erregung) ist die Zeeman Energie

$$E_{ext} = -\mu_0 \int d^3r \vec{H}_{ext}(\vec{r}) \vec{M}(\vec{r})$$

Durch Minimierung der Gesamtenergie lassen sich die magnetischen Strukturen bestimmen. Allerdings werden häufig metastabile Strukturen eingefroren. Diese Strukturen kann man zum Beispiel durch eine lokale Stabilitätsanalyse beim Umklappen des Felds bestimmen. Man beginnt mit einem vollständig polarisierten Material und klappt die Magnetisierung durch ein entgegengesetztes externes magnetisches Feld um.

|                                  | $M_s$ [kA/m] | $K_1$ [kJ/m <sup>3</sup> ] | $K_2$ [kJ/m <sup>3</sup> ] | $A$ [pJ/m] |
|----------------------------------|--------------|----------------------------|----------------------------|------------|
| Fe                               | 1710         | 45                         | 20                         | 10         |
| Co                               | 1430         | 430                        | 120                        | 10         |
| Ni                               | 483          | -4.5                       | 2.3                        | 10         |
| CrO <sub>2</sub>                 | 480          | 22                         | 4                          | 1          |
| Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>   | 480          | -11                        | -2.8                       | 1          |
| g-Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 350          | -4.6                       | 0                          | 1          |

Daten aus [13]

Hier wurde nur an der Oberfläche gekratzt. Das Material habe ich aus der Diplomarbeit von B. Streibl entnommen[? ]. Das Buch von Brown[14] wird im Zusammenhang mit mikromagnetischen Arbeiten häufig zitiert.

## 6.8 Übungen

### 6.8.1 Das Streufeld eines Magneten

Betrachte das Magnetfeld eines Magneten, mit der Magnetisierung  $|\vec{M}(r)| = M_0$ . Die Magnetisierung sei frei drehbar. Bestimme die Energie  $E = \int d^3r \frac{1}{2} \vec{E} \vec{H}$  des magnetischen Feldes in Abhängigkeit der Richtung und entscheide, ob das Magnetfeld parallel oder senkrecht zur Oberfläche steht. Die Form des Magneten sei ein Zylinder der Länge  $L$  und dem Durchmesser  $d$ .

### 6.8.2 Wechselwirkung zweier magnetischen Momente

Betrachte in einem Atom die magnetische Wechselwirkung des Atomkerns mit den Elektronen als Funktion des Abstands und der Richtungen der magnetischen Momente. Der Atomkern habe ein magnetisches Moment  $M_1$  und das Elektron hat den Drehimpuls  $\frac{1}{2}\hbar$  und das gyromagnetische Verhältnis  $g_e = 2$ .

### 6.8.3 Magnetisches Moment einer Leiterschleife

Zeige, dass ganz allgemein gilt  $M = IA$  wobei  $I$  der Strom der Leiterschleife und  $A$  die eingeschlossene Fläche ist. Editor: Was ist mit nicht ebenen Leiterschleifen?

Bestimme das Magnetische Moment einer Spule mit  $n$  Windungen.

### 6.8.4 Punktdipol

Überprüfe, dass die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}) = -\vec{m}_0 \times \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  einen Punktdipol mit dem Moment  $\vec{m}_0$  am Ort  $\vec{r}_0$  beschreibt.

Lösung:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3r \vec{r} \times (\vec{m}_0 \times \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0))$$

Mit Hilfe der Vektoridentität  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{m} &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3r \left( \vec{r} [\vec{\nabla} \delta(r - r_0)] \right) \vec{m}_0 - (\vec{r} \vec{m}_0) \vec{\nabla} \delta(r - r_0) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3r \left[ -\delta(r - r_0) \vec{m}_0 \underbrace{(\vec{\nabla} \vec{r})}_{=3} + \delta(r - r_0) \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{r} \vec{m}_0)}_{=\vec{m}_0} \right] \\ &= \vec{m}_0\end{aligned}$$

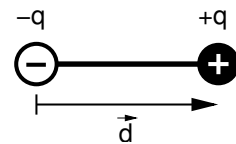
## Chapter 7

# Elektrodynamik in der Materie (4h)

### 7.1 Polarisation

Der Gedanke, der hinter dem Begriff der **Polarisation** steht, ist, dass das Material aus Atomen besteht, welche in einem angelegten elektrischen Feld polarisiert werden, also einen elektrischen Dipol ausbilden. Die Polarisation ist die Dichte dieser Dipole.

Ähnlich, wie wir Punktladungen in Gl. 2.1 zu einer Ladungsdichte zusammengefasst haben, können auch Dipole zu einer Dipoldichte zusammengefasst werden. Diese Dipoldichte wird **Polarisation** genannt.



#### Definition 7.1 POLARISATION

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{r_c \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega_{r_c}|} \sum_{\vec{r}_j \in \Omega} \vec{p}_j$$

Dabei ist  $\Omega_{r_c}$  eine am Ort  $\vec{r}$  zentrierte Kugel mit Radius  $r_c$  und Volumen  $|\Omega_{r_c}| = \frac{4\pi}{3} r_c^3$ . Die Summe erstreckt sich über alle Punktdipole mit Dipolmoment  $\vec{p}_n$  und Position  $\vec{r}_n$ , die sich in der Kugel befinden.

Die Polarisation einer Verteilung von Punktdipolen hat die Form

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_n \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \quad (7.1)$$

Um mit der Polarisationsdichte umgehen zu können, ist es nützlich, sie durch eine Ladungsdichte auszudrücken. Das erlaubt es, die bekannten Methoden einzusetzen, die für Ladungsdichten entwickelt wurden. Diese Ladungsdichte wird darüber hinaus hilfreich sein, um die Polarisation in den Maxwellgleichungen zu berücksichtigen.

Den Zusammenhang zwischen Polarisation und Ladungsdichte erhält man mit Hilfe der Ladungsverteilung eines Punktdipols, Gl. 5.19 auf S. 63.

$$\rho_{pol}(\vec{r}) \stackrel{\text{Gl. 5.19}}{=} \sum_n [-\vec{p}_n \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)] = -\vec{\nabla} \cdot \left[ \sum_n \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right] \stackrel{\text{Gl. 7.1}}{=} -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

Damit erhalten wir

## ZUSAMMENHANG ZWISCHEN POLARISATION UND LADUNGSDICHTE

$$\rho_{pol}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \quad (7.2)$$

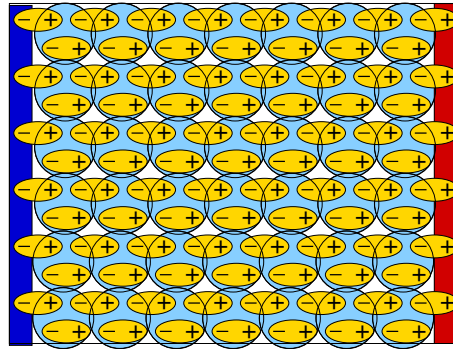


Abb. 7.1: Eine homogene Polarisation, durch gelbe Dipole dargestellt, in einem Körper lässt sich durch Oberflächenladungsdichte, blau und rot unterlegt, ersetzen. Im Innern des Körpers lassen sich die Ladungen zu neutralen Einheiten ohne Dipol zusammenfassen.

### 7.1.1 Rolle von Polarisation und Magnetisierung

Die Rolle der Polarisation in der Elektrostatik ist analog zu der Rolle der Magnetisierung in der Magnetostatik. Letztere wurde in Kapitel 6.5 und Gl. 6.14 eingeführt. Während die Polarisation die Dichte elektrischer Dipole beschreibt, ist die Magnetisierung die Dichte magnetischer Dipole.

Externe Felder können in einem Material sowohl elektrische als auch magnetische Dipole induzieren. Sind die Dipole bereits in Abwesenheit externer Felder vorhanden, nennt man sie **remanente** magnetische oder elektrische Dipole, bzw. remanente Polarisation oder Magnetisierung.

Die Polarisation ist über Gl. 7.2 mit einer Ladungsdichte verknüpft. Ähnlich ist der Magnetisierung über Gl. 6.16 eine Stromdichte zugeordnet.

In einem Material ist die einfache Interpretation der Polarisation bzw. der Magnetisierung als Dichte atomare Dipole problematisch, weil die Atome in einem Material nicht mehr eindeutig voneinander abgegrenzt werden können.<sup>1</sup> Polarisation und Magnetisierung sind nicht direkt messbar, sondern nur indirekt über die entsprechenden Strom- und Ladungsdichten, bzw. deren Felder. Deshalb betrachte ich die induzierten bzw. remanenten Ladungsdichten im Material als die fundamentalen Größen und Polarisation und Magnetisierung als abgeleitete Hilfsgrößen, mit untergeordneter physikalischer Bedeutung.

Dieser Blickwinkel weicht von der üblichen Sichtweise ab, ist aber vollkommen gleichwertig. Bei einem solchen Wechsel der Perspektive ist es wichtig, die logischen Zusammenhänge nicht durcheinanderzubringen. Andernfalls läuft man Gefahr, einen Sachverhalt, der aus einer Herleitung resultiert, bereits in der Herleitung zu verwenden, was natürlich zu unsinnigen Tautologien führt. Den Blickwinkel wechseln zu können, ist eine äußerst wichtige Fähigkeit für einen Physiker, und wir nutzen das Folgende, um diese Fähigkeit zu trainieren.

<sup>1</sup>Das Problem führt nicht nur zu kleinen Korrekturen, sondern macht das ganze Problem unbestimmt. Das wird aus Fig. 7.1 ersichtlich.

### 7.1.2 Differentialgleichungen für Polarisierung und Magnetisierung

Hier betrachte ich die induzierten Ladungsdichten  $\rho_{ind}(\vec{r}, t)$  und Stromdichten  $\vec{j}_{ind}(\vec{r}, t)$  als gegebene Größen. Daraus sollen Gleichungen, welche Polarisierung und Magnetisierung bestimmen, abgeleitet werden. Wir werden später sehen, dass diese Gleichungen den Maxwellgleichung des Vakuums sehr ähnlich sind und sich dadurch leicht in letzere integrieren lassen.

Wir gehen von den Definitionsgleichungen für die Polarisationsdichte und die Magnetisierungsstromdichte aus

$$\rho_{pol}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Gl. 7.2}}{=} -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (7.3)$$

$$\vec{j}_{mag}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Gl. 6.14}}{=} \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t) \quad (7.4)$$

Die induzierten Ladungs- und Stromdichten betrachten wir jeweils als Summe eines Polarisierungsanteils und eines Magnetisierungsanteils. Es gilt also

$$\rho_{ind}(\vec{r}, t) = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)}_{\rho_{pol}} + \rho_{mag}(\vec{r}, t) \quad (7.5)$$

$$\vec{j}_{ind}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{pol}(\vec{r}, t) + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t)}_{\vec{j}_{mag}} \quad (7.6)$$

Die Polarisierungs und Magnetisierungsanteile der Dichten sind noch nicht klar definiert. Der Polarisierungsanteil soll mit einer verschwindenden Magnetisierungsdichte kompatibel sein und der Magnetisierungsanteil soll mit einer verschwindenden Polarisierungsdichte kompatibel sein. Dabei spielt der Ladungserhaltungssatz die wesentliche Rolle. Er muss insgesamt für die induzierte Ladungsdichte gelten, aber nun auch für die Anteile separat.

Der Ladungserhaltungssatz Gl. 2.13 fordert für den Polarisationsanteil

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Gl. 2.13}}{=} \partial_t \rho_{pol} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{pol} \stackrel{\text{Gl. 7.2}}{=} \vec{\nabla} \cdot (-\partial_t \vec{P} + \vec{j}_{pol}) \\ \Leftrightarrow \quad \vec{j}_{pol} &= \left( \partial_t \vec{P} \right) + \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Die Divergenz legt die Stromdichte für eine gegebene Polarisierung noch nicht fest, sondern erlaubt die Addition der Rotation eines beliebigen Vektorfeldes  $\vec{F}$ . Dabei haben wir auf das Helmholtztheorem Gl. D.3 (S. 241) zurückgegriffen.

Für den Magnetisierungsanteil folgt aus der Ladungserhaltung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Gl. 2.13}}{=} \partial_t \rho_{mag} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{mag} \stackrel{\text{Gl. 7.2}}{=} \partial_t \rho_{mag} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M})}_{=0} \\ \Leftrightarrow \quad \rho_{mag}(\vec{r}, t) &= g(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.8)$$

wobei  $g(\vec{r})$  eine beliebige, aber zeitlich konstante Funktion ist.

Wir erhalten also aus Gl. 7.5 und Gl. 7.10

$$\rho_{ind}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t) + g(\vec{r}) \quad (7.9)$$

$$\vec{j}_{ind}(\vec{r}, t) = \partial_t \vec{P}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) \quad (7.10)$$

Erinnern wir uns, was unser Ziel ist: Wir wollen eine Polarisierung und eine Magnetisierung finden, die mit den induzierten Strom- und Ladungsdichte kompatibel ist, und diese eindeutig bestimmt. Das legt nahe, die unbestimmten Größen einfach auf Null zu setzen.

Damit erhalten wir

## GLEICHUNGEN FÜR POLARISATION UND MAGNETISIERUNG

Bei gegebenen induzierten Ladungs- und Stromdichten im Material können Polarisation und Magnetisierung mit Hilfe von

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \stackrel{\text{Gl. 7.9}}{=} \vec{\rho}_{ind} \quad (7.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} + \partial_t \vec{P} \stackrel{\text{Gl. 7.10}}{=} \vec{J}_{ind} \quad (7.12)$$

bestimmt werden. Wir fassen diese Gleichungen als Definition der Magnetisierung und der Polarisation auf.

Aus einer gegebenen Polarisation und Magnetisierung folgen also eindeutig die induzierten Ladungs- und Stromdichten. Umgekehrt legen vorgegebene induzierte Ladungs- und Stromdichten, die Polarisation und Magnetisierung nicht eindeutig fest.

**Mehrdeutigkeit der Polarisation und der Magnetisierung**

Hier analysieren wir die Freiheit bei der Festlegung der Polarisation und Magnetisierung aus den obigen Gleichungen Gl. 7.11 und Gl. 7.12.

Dazu betrachten wir zwei Lösungen, die sich durch  $\delta \vec{P}(\vec{r}, t)$  und  $\delta \vec{M}(\vec{r}, t)$  unterscheiden. Welche Bedingungen müssen  $\delta \vec{P}$  und  $\delta \vec{M}$  erfüllen? Einsetzen in die Differentialgleichungen Gl. 7.11 und Gl. 7.12 liefert die Bedingungen

$$\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{P} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t \delta \vec{P} + \vec{\nabla} \times \delta \vec{M} = 0$$

Die erste Bedingung bestimmt  $\delta \vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ , als reines Wirbelfeld, wobei  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  ein beliebiges Vektorfeld ist.<sup>2</sup> Dies folgt aus dem Helmholtz theorem Gl. D.3, wobei wir voraussetzen, dass die Polarisierungen im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet.

Es gilt also

$$\delta \vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad \text{und} \quad \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \delta \vec{M} = 0$$

Die zweite Bedingung legt  $\delta \vec{M} = \partial_t \vec{F}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} g(\vec{r}, t)$  bis auf ein beliebiges Gradientenfeld fest.

$$\delta \vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad \text{und} \quad \delta \vec{M} = -\partial_t \vec{F} + \vec{\nabla} g$$

Das ist das gewünschte Resultat: Es kann also durch Wahl eines beliebigen Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  und eines weiteren beliebigen skalaren Feldes  $g(\vec{r}, t)$  ein neuer Satz von Polarisation und Magnetisierung gefunden werden, der mit denselben induzierten Dichten im Sinne von Gl. 7.11 und Gl. 7.12 kompatibel ist.

**Die Lösungen für Polarisation und Magnetisierung**

Die Gleichungen Gl. 7.11 und Gl. 7.12 haben große Ähnlichkeit mit den Maxwellgleichungen Gl. 3.1 und Gl. 3.1.

$$\left. \begin{array}{l} -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{M} + \partial_t \vec{P} = \vec{j} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j} \end{array} \right|$$

<sup>2</sup>In diesem Abschnitt verwenden wir die gleichen Symbole  $\vec{F}$  und  $g$  wie im letzten Abschnitt. Die Bedeutung ist aber eine andere.



Wir können uns die Lösungen einfach von denen der Maxwellgleichungen abkopieren. Siehe Gln. 4.4, 4.7 und Gl. 6.4. Dabei beschränken wir uns auf den statischen Fall.

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \left[ \int d^3r' \frac{\rho_{pol}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] + \vec{\nabla} \times \vec{F}_1(\vec{r}) + \vec{\nabla} \vec{F}_2(\vec{r}) \\ &= - \int d^3r' \frac{\rho_{pol}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{\nabla} \times \vec{F}_1(\vec{r}) + \vec{\nabla} \vec{F}_2(\vec{r}) \\ \vec{M}(\vec{r}) &= \int d^3r' \frac{\vec{J}_{mag}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \vec{\nabla} F_3(\vec{r})\end{aligned}$$

Wir wollen hierbei besonders die Mehrdeutigkeit der Lösungen beachten. Wir haben hier die Rotation eines beliebigen Vektorfeldes  $\vec{F}_1$  und den Gradienten einer skalaren Funktion  $F_2(\vec{r})$ , welche die Laplace Gleichung  $\vec{\nabla}^2 F_2 = 0$  erfüllt, addiert, um zu einer allgemeinen Lösung zu gelangen. Der erste Term ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung Gl. 7.2. Dazu kann eine beliebige Lösung der homogenen Differentialgleichung  $\vec{\nabla} \vec{P} = 0$  addiert werden. Ein allgemeines divergenzfreies Vektorfeld kann nach dem Helmholtz Theorem (Appendix D.5) als Superposition der Rotation eines beliebigen Vektorfeldes, in unserem Fall  $\vec{F}_1(\vec{r})$ , und dem Gradienten einer Lösung der Laplacegleichung, dargestellt werden.

Wir sehen, dass die Polarisierung nicht notwendig außerhalb des Materials verschwindet, wie man das von einer Dipoldichte erwarten würde. Insbesondere taucht das Problem auf, wenn das Material geladen ist. Es ist damit verbunden, dass man versucht eine Punktladung durch Dipole zu beschreiben. Dies ist ein klarer Mangel der Theorie, hat aber keinen Einfluss auf die Vorhersagen, solange man nicht die Annahme macht, dass die Polarisierung außerhalb des Materials verschwindet.

## 7.2 Maxwellgleichungen in der Materie

**Editor: Hierzu ein Bild zu externen, internen und induzierten Ladungsdichten. Beispiel Plattenkondensator oder Dotieratom.**

Setzen wir ein Stück Material externen elektrischen und magnetischen Felder aus, dann werden in dem Material Ladungen verschoben und Ströme werden zum Fließen angeregt. Es wäre ausgesprochen mühsam, wenn wir diese induzierten Ladungen und Ströme explizit bestimmen müssten, wenn wir zum Beispiel untersuchen wollten, wie sich Ströme in einem Draht, der durch einen Halbleiterchip führt verhalten. Deshalb ist es üblich, die internen Ladungen und Ströme von den externen zu trennen und unterschiedlich zu behandeln.

Die Darstellung, die im Folgenden beschrieben wird, ist sehr nützlich, wenn die Materialien als gleichförmig angenommen werden können und eine einfache Form aufweisen. Die Verallgemeinerung auf beliebige Fälle ist jedoch nicht trivial.

Wir stellen uns ein Stück Material vor, das ohne äußere Felder die Ladungsdichte  $\rho_0(\vec{r})$  und die Stromdichte  $\vec{J}_0(\vec{r})$  besitzt.<sup>3</sup> Nun setzen wir diesen Körper externen Feldern aus. Als Resultat werden Ladungen verschoben und Ströme werden im Material angeregt und umgelenkt. Diese induzierten Ladungs- und Stromdichten bezeichnen wir mit  $\rho_{ind}$  und  $\vec{J}_{ind}$ . Die internen Ladungs- und Stromdichten,  $\rho_{pol}$  und  $\vec{J}_{pol} + \vec{J}_{mag}$ , setzen sich aus denen ohne Felder und den induzierten zusammen, also

$$\begin{aligned}\rho_{int} &= \rho_{pol} = \rho_0 + \rho_{ind} \\ \vec{J}_{int} &= \vec{J}_{pol} + \vec{J}_{mag} = \vec{J}_0 + \vec{J}_{ind}\end{aligned}$$

Die externen Felder müssen irgendwie auch durch Ladungs und Stromdichten erzeugt werden. Wir nennen diese externe Ladungs- und Stromdichten und bezeichnen sie mit  $\rho_{ext}(\vec{r})$  und  $\vec{J}_{ext}(\vec{r})$ . Es

<sup>3</sup>In einem magnetischen Material können auch im Ruhezustand Ströme fließen.

gilt also für die gesamten Ladungs und Stromdichten

$$\begin{aligned}\rho_{tot} &= \rho_{int} + \rho_{ext} \\ \vec{J}_{tot} &= \vec{J}_{int} + \vec{J}_{ext}\end{aligned}$$

Die internen Ladungs- und Stromdichten des gestörten Materials als beschreiben wir durch eine Polarisation und eine Magnetisierung.

$$\begin{aligned}-\vec{\nabla} \cdot \vec{P} &= \rho_{int} \\ \vec{\nabla} \times \vec{M} + \partial_t \vec{P} &= \vec{J}_{int}\end{aligned}$$

Wir nutzen wieder die Ähnlichkeit dieser Gleichungen mit den Maxwellgleichungen Gl. 3.1,3.4.<sup>4</sup>

Nun setzen wir die internen Ladungs- und Stromdichten in die Maxwellgleichungen Gl. 3.1 und Gl. 3.4 des Vakuums ein, d.h. mit  $\epsilon = \epsilon_0$  und  $\mu = \mu_0$ .

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) &= \rho_{ext} - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}_{\rho_{int}} \\ \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right) - \partial_t (\epsilon_0 \vec{E}) &= \vec{J}_{ext} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{M} + \partial_t \vec{P}}_{\vec{J}_{int}}\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können in eine einfachere Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} &= \rho_{ext} \\ \vec{\nabla} \times \underbrace{\left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right)}_{\vec{H}} - \partial_t \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} &= \vec{J}_{ext}\end{aligned}$$

Indem wir die dielektrische Erregung  $\vec{D}$  und die magnetische Erregung  $\vec{H}$  einführen, können die Maxwellgleichungen erheblich vereinfacht werden.

#### DIELEKTRISCHE UND MAGNETISCHE ERREGUNG

Die dielektrische Erregung  $\vec{D}(\vec{r})$  und die magnetische Erregung  $\vec{M}(\vec{r})$  sind

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (7.13)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (7.14)$$

Sie erhalten die bekannte Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{ext} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{J}_{ext}\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind der Form nach identisch mit den bekannten Maxwellgleichungen Gl. 3.1-3.4. Die wesentlichen Unterschiede sind allerdings,

<sup>4</sup>Beachte aber, dass die beiden anderen Maxwellgleichungen Gl. 3.2,3.3 auch erfüllt sein müssten damit wir die Polarisation als  $\vec{P} = -\epsilon_0 \vec{E}_{int}$  und die Magnetisierung als  $\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{int}$  interpretieren können. In dieser scheinbar harmlosen Bemerkung steckt die gesamte Schwierigkeit, die Maxwellgleichungen in der Materie zu lösen.

- dass die dielektrische Erregung nun auch die Polarisation enthält und die magnetische Erregung  $\vec{H}$  die Magnetisierung und,
- dass nur die externen Ladungs- und Stromdichten als Quellen der Felder eingehen.

Es ist von allergrößter Bedeutung zu beachten, dass die Aufteilung in externe und interne Größen weitgehend beliebig ist, und daher auf Konsistenz geachtet werden muss. Im Allgemeinen beschreibt man die atomaren Dipole und Ströme mittels einer Polarisation bzw. Magnetisierung, während man die Ströme und Ladungen, welche man durch externe Spannungen und Ströme kontrollieren kann durch externe Ladungs- und Stromdichten beschreibt. Betrachtet man allerdings die Bewegung von Ladungsträgern in einem Material, ist besondere Vorsicht geboten, weil diese ja selber Teil des Materials sind.

- Die beschriebene Aufteilung hat den Nachteil, dass wir die gesamte Ladungsdichte und Stromdichte des Materials durch eine Polarisation beschreiben, was unnatürlich erscheint.
- Fließbach zieht von den Maxwellgleichungen des gestörten System diejenigen des Referenzsystems ab. Die Felder sind dann

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{tot} - \vec{E}_0 = E_{ext} + E_{ind} \\ \vec{B} &= \vec{B}_{tot} + \vec{B}_0 = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{ind} \\ \vec{D} &= \epsilon_0(\vec{E}_{tot} - \vec{E}_0) + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}_{tot} - \vec{E}_0) + \vec{P} \\ \rho_{int} &= \rho_{tot} - (\rho_0 + \rho_{ext}) = \rho_{ind} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \vec{J}_{int} &= \vec{J}_{tot} - (\vec{J}_0 + \vec{J}_{ext}) = \vec{J}_{ind} = \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}\end{aligned}$$

Der Vorteil dieser Beschreibung ist der Zusammenhang mit der Theorie der linearen Antwort, weil die Felder und Ladungsdichten im Ruhezustand verschwinden. Man konzentriert sich dabei auf die Störung, und hat die Eigenschaften des ungestörten Zustands ausgeblendet. Bei der man die Änderung der Ladungs- und Stromdichten zu linearer Ordnung in den externen feldern untersucht. Ein Nachteil taucht auf wenn der Ruhezustand selbst eine spontante Polarisation oder Magnetisierung enthält.

- Bei einer räumlichen Mittelung mittelt sich die Ladungsdichte des Ruhezustands heraus.

#### Beispiele:

- Betrachte Dotieratome in einem Halbleiter. Der Referenzzustand ist der undotierte Halbleiter.  $\rho_{ext}$  sind die Ladungen der ionisierten Dotieratome und die Leitungselektronen bzw. Leitungslöcher.
- Betrachte Leitungsbahnen in einem Computerchip. Die Leitungsbahnen sind in eine dielektrische Matrix (einen Isolator) eingebettet. Die Matrix ist der Referenzzustand. Die Ströme  $\vec{J}_{ext}$  sind die Ströme in den Leitungsbahnen.
- betrachte einen Kondensator, der mit einem Dielektrikum gefüllt ist. Die externe Ladung beschreibt die Ladung der Leiterplatten. Das Dielektrikum ohne Feld ist der Referenzzustand  $\rho_0$ .

## 7.3 Zustandsgleichungen

Die Polarisation und Magnetisierung in Material werden selber durch die elektrischen und magnetischen Felder verursacht.

Um die Materialeigenschaften kennenzulernen, bestimmt man experimentell den Zusammenhang zwischen Polarisation  $\vec{P}$  und Magnetisierung  $\vec{M}$  von den angelegten Feldern, dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  und der magnetischen Erregung  $\vec{H}$ . Messungen liefern uns zum Beispiel  $\vec{P}(\vec{E}, \vec{H})$  und  $\vec{M}(\vec{E}, \vec{H})$ . Es ist üblich, elektrische und magnetische Größen zu trennen. Dies hat keinen besonderen Grund, außer, dass die Kreuzterme üblicherweise klein sind.

Die Zustandsgleichungen beschreiben diesen Zusammenhang.

$$\vec{P}(E) = \vec{P}_{rem} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} + O(E^2) \quad (7.15)$$

$$\vec{M}(H) = \vec{M}_{rem} + \chi_m \vec{H} + O(H^2) \quad (7.16)$$

Diese Gleichungen können als Taylorentwicklung einer Funktion  $\vec{P}(\vec{E}, \vec{H})$ , bzw.  $\vec{M}(\vec{E}, \vec{H})$ , angesehen werden.  $\vec{P}_{rem}$  und  $\vec{M}_{rem}$  sind die sogenannten **remanente Polarisation** und **remanente Magnetisierung**.

Meistens ist man an der linearen Antwort, das heißt, dem Beitrag bei sehr kleinen Feldern, interessiert. Wir definieren uns daher die Suszeptibilitäten.<sup>5</sup>

### Definition 7.2 ELEKTRISCHE SUSZEPTIBILITÄT

Die elektrische Suszeptibilität<sup>a</sup> ist, bis auf die Konstante  $\frac{1}{\epsilon_0}$  die Ableitung der Polarisation  $P$  nach dem elektrischen Feld  $E$ .

$$[\chi_e]_{ij} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dP_i}{dE_j} \quad (7.17)$$

Bei isotropen Materialien ist die Suszeptibilitätstensor proportional zur Einheitsmatrix.

<sup>a</sup>Es ist nicht immer einheitlich definiert, ob die Suszeptibilität bei verschwindendem Feld bestimmt werden muss. Man kann auf der einen Seite die Polarisation als  $P(E) = \int_0^E dE' \chi(E')$  bestimmen. Auf der anderen Seite kann man Suszeptibilitäten höherer Ordnung einführen  $P(E) = P_{rem} + \chi_e^{(1)} E + \chi_e^{(2)} E^2 + O(E^2)$ . Dabei wird  $\chi_e^{(1)}$  die lineare Suszeptibilität und  $\chi_e^{(2)}$  die Suszeptibilität zweiter Ordnung genannt.

### Definition 7.3 MAGNETISCHE SUSZEPTIBILITÄT

Die magnetische Suszeptibilität ist die Ableitung der Magnetisierung  $M$  nach der magnetischen Erregung  $H$ .

$$[\chi_m]_{ij} = \frac{dM_i}{dH_j} \quad (7.18)$$

Um uns die Zusammenhänge zu verdeutlichen betrachten wir einige Modellsysteme.

$$B(H) = \mu_0(H + M) \stackrel{\text{Gl. 7.16}}{=} \mu_0 M_{rem} + \underbrace{\mu_0(1 + \chi_m)}_{=: \mu_r} H = \mu_0 M_{rem} + \mu_0 \mu_r H$$

$$D(E) = \epsilon_0 E + P \stackrel{\text{Gl. 7.15}}{=} P_{rem} + \underbrace{\epsilon_0(1 + \chi_e)}_{=: \epsilon_r} E = P_{rem} + \epsilon_0 \epsilon_r E$$

Ist  $\chi_m > 0$  spricht man von einem **Paramagneten**. Ist  $\chi_m < 0$  nennt man das Material einen **Diamagneten**. Ist die remanente magnetisierung  $M_{rem}$  ungleich Null, spricht man von einem **Ferro-magneten**.

<sup>5</sup>Hier gibt es wieder unglückliche Begriffsverwirrungen. Häufig findet man die Definition  $\chi_e = P/E$  und  $\chi_m = M/H$ . Dabei geht man davon aus, dass erstens die Polarisation bei verschwindenden Feldern verschwinden, und, dass der Zusammenhang ein linearer ist. Dies ist aber nicht immer der Fall.

**Definition 7.4** RELATIVE DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTE

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (7.19)$$

Die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  ist das Produkt der Dielektrizitätskonstante des Vakuums  $\epsilon_0$  mit der relativen Dielektrizitätskonstante, d.h.

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (7.20)$$

Die relative Dielektrizitätskonstante ist einheitenlos.

**Definition 7.5** RELATIVE INDUKTIONSKONSTANTE

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (7.21)$$

Die Induktionskonstante  $\mu$  ist das Produkt der Induktionskonstante des Vakuums  $\mu_0$  mit der relativen Induktionskonstante, d.h.

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (7.22)$$

Die relative Induktionskonstante ist einheitenlos.

**7.3.1 Modell für einen Paramagneten**

Stellen wir uns vor, dass die innere Energie  $E_0(M)$  eines Materials von der Magnetisierung abhängt. In einem angelegten magnetischen Feld müssen wir zur inneren Energie noch die magnetische Energie  $-\vec{B}\vec{m} = -\int d^3r \vec{M}\vec{B}$ , Gl. 6.19 auf S. 91, hinzuaddieren. Dabei ist das magnetische Moment  $\vec{m}$  das Integral der Magnetisierung  $\vec{M}$  des Materials. Im folgenden verzichten wir auf die Vektorpfeile und nehmen an, dass sich Magnetfeld und Magnetisierung nur entlang einer Richtung ausrichten können. Wir veranschaulichen hier ein allgemeines Prinzip am Beispiel eines magnetischen Materials, um Verwechslungen mit den Symbolen von Energie und elektrischem Feld zu vermeiden. Jedoch lässt sich das Prinzip analog auf dielektrische Materialien übertragen.

Die Gesamtenergie hat dann die Form

$$E_{tot}(M, B) = \int d^3r e_{tot}(M, B) = \int d^3r [e_0(M) - BM]$$

Dabei ist  $e_{tot}(M, B)$  die Energiedichte des Materials in Gegenwart von externen Feldern und  $e_0(M)$  ist die Energiedichte des Materials in Abwesenheit von Magnetfeldern.

Das Material wird seine Magnetisierung so einstellen, dass die Energie  $E_{tot}$  minimal wird.

$$\frac{\delta E_{tot}}{\delta M(\vec{r})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial e_0}{\partial M} = B$$

Für eine gegebene Magnetisierung erhalten wir also das Magnetfeld, bei dem sie stabil ist als Ableitung der inneren Energie.

Betrachten wir nun ein einfaches Modellsystem ohne remanente Magnetisierung, bei dem wir seine Energie nur bis zur zweiten Ordnung in der Magnetisierung berücksichtigen.

$$e_0(M) = \frac{1}{2} c M^2$$

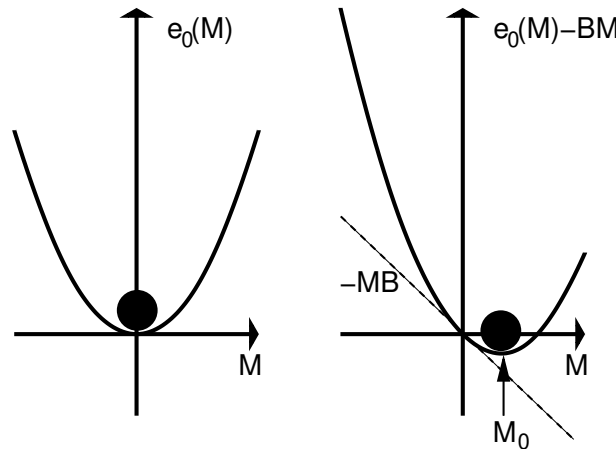


Abb. 7.2: Energiedichte eines Paramagneten als Funktion der Magnetisierung. Links ohne angelegtes magnetische Feld. Rechts mit angelegtem magnetischem Feld. Das Feld verschiebt das Minimum hin zu einer endlichen Magnetisierung  $M_0$

Die Gesamtenergie inklusive der magnetischen Energie ist dann

$$e_{tot}(M, B) = \frac{1}{2} c M^2 - MB \quad (7.23)$$

Nun bestimmen wir für jedem Wert des Magnetfeldes die optimale Magnetisierung. In diesem Modell erhalten wir

$$\frac{\partial e_{tot}(M, B)}{\partial M} = 0 \quad \Rightarrow \quad M(B) = \frac{1}{c} B \quad (7.24)$$

Um  $M(H)$  aus der bekannten Funktion  $M(B)$  zu bestimmen, müssen wir erst das Magnetfeld durch die magnetische Erregung ausdrücken.

$$\begin{aligned} H(B) &\stackrel{\text{Gl. 7.14}}{=} \frac{1}{\mu_0} B - M(B) \stackrel{\text{Gl. 7.24}}{=} \frac{1}{\mu_0} B - \frac{1}{c} B \\ \Rightarrow B(H) &= \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{c} \right)^{-1} H = \mu_0 \left( 1 - \frac{\mu_0}{c} \right)^{-1} H \\ \Rightarrow M(H) &= M(B(H)) \stackrel{\text{Gl. 7.24}}{=} \frac{1}{c} B(H) = \frac{\mu_0}{c} \left( 1 - \frac{\mu_0}{c} \right)^{-1} H = \frac{1}{\frac{c}{\mu_0} - 1} H \\ \Rightarrow \chi_m &\stackrel{\text{Gl. 7.18}}{=} \frac{dM}{dH} = \frac{1}{\frac{c}{\mu_0} - 1} \\ B(H) &\stackrel{\text{Gl. 3.6, 7.21, 7.22}}{=} \mu_0 \left( 1 - \frac{\mu_0}{c} \right)^{-1} H = \mu_0 \left[ 1 + \underbrace{\left( \frac{c}{\mu_0} - 1 \right)^{-1}}_{\chi_m} \right] H \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Magnetisierung ohne äußeres magnetisches Feld verschwindet. Die remanente Magnetisierung ist also null. Ein angelegtem Feld erzeugt aber eine Magnetisierung, die proportional zum Magnetfeld ansteigt.

Schließlich können wir die Energie mit Hilfe der magnetischen Suszeptibilität ausdrücken:

## ENERGIEFUNKTIONAL EINES PARAMAGNETEN

$$\chi_m = \left( \frac{c}{\mu_0} - 1 \right)^{-1} \Rightarrow c = \mu_0 \frac{1 + \chi_m}{\chi_m}$$

$$E_{tot}(B, M) \stackrel{\text{Gl. 7.23}}{=} \int d^3r \left( \frac{1}{2} \mu_0 \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} M^2 - MB \right)$$

## 7.3.2 Modell für einen Ferromagneten

Nun betrachten wir ein Modellsystem für einen Ferromagneten.

$$e_0(M) = aM^4 - bM^2$$

bereits ohne angelegtes Feld erhalten wir drei Lösungen, für  $\frac{\partial e_0}{\partial M} = 0$ , nämlich  $M_1 = -\sqrt{\frac{b}{2a}}$ ,  $M_2 = 0$  und bei  $M_3 = \sqrt{\frac{b}{2a}}$ .

Haben  $a$  und  $b$  dasselbe Vorzeichen, dann sind davon zwei Lösungen, nämlich  $M_1$  und  $M_3$ , Minima, und  $M_2$  ist ein Maximum. Die Minima sind stabile Lösungen, und entsprechen der remanenten Magnetisierung  $M_{rem} = \pm \sqrt{\frac{b}{2a}}$ .

Betrachten wir nun die Minima bei angelegtem magnetischen Feld.

$$E_{tot}(M) = \int d^3r (aM^4 - bM^2 - BM)$$

In Fig. 7.3 ist die Gesamtenergie für unterschiedliche Magnetfelder dargestellt. Wir sehen, dass eine der Lösungen bei einer bestimmten Stärke des Magnetfeldes instabil wird. (Ein Ball im oberen Minimum würde in das tiefere Minimum laufen.) Bei diesem magnetischen Feld würde die Magnetisierung, wenn sie sich zunächst im ungünstigeren Minimum befindet, spontan in das stabilere Minimum springen.

Die Kennlinie  $M(B)$  der stabilen Zustände mit dem beschriebenen Verhalten nennt man **Hysterese**, die in Abb. 7.3 dargestellt ist. Variiert man das Magnetfeld langsam von großen negativen Werten zu großen positiven Werten, dann bleibt das System zunächst einige Zeit im ungünstigeren Minimum und schaltet erst bei einer kritischen Feldstärke um. Ohne Magnetfeld gibt es zwei unterschiedliche Zustände, die davon abhängen, welchen Magnetfeldern das System vorher ausgesetzt war. Deshalb kann man ferromagnetische Materialien als Datenspeicher einsetzen.

In Wirklichkeit schaltet eine Hysteresekurve nicht so spontan um, wie in unserem einfachen Modellsystem. In unserem Modell können wir auch nicht erklären, warum ein Stück Eisen erst magnetisiert werden muss, um ein Magnetfeld aufzuweisen. Der Grund liegt darin, dass das Material unterschiedlich magnetisierte Domänen, sogenannte **Weissche Bezirke** aufweist, wie sie in Abb. 7.4 dargestellt sind. Makroskopisch heben sich die Magnetfelder der Weiss'schen Bezirke weitgehend auf. Legt man ein Magnetfeld an, dann verschieben sich die Domainengrenzen derart, dass die günstig ausgerichteten Domänen auf Kosten der ungünstig magnetisierten Domänen wachsen. Um die Dynamik der Magnetisierung zu verstehen, muss man also die Wanderung der Domänenwände untersuchen.

Materialien mit einer remanenten Magnetisierung nennt man **ferromagnetisch**. Analog nennt man Materialien mit einer permanenten Polarisierung **ferroelektrisch**.

Die Parameter  $a$  und  $b$  sind normalerweise temperaturabhängig. Wechselt der Parameter  $b$ , wie in Abb. 7.5 dargestellt, mit steigender Temperatur sein Vorzeichen, dann existiert oberhalb dieser Temperatur nur ein stabiler Zustand mit verschwindender Magnetisierung. Man nennt diese Temperatur **Curietemperatur**<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Pierre Curie. Franz. Physiker 1859-1906. Nobelpreis 1903 für Physik für die Entdeckung der Radioaktivität.

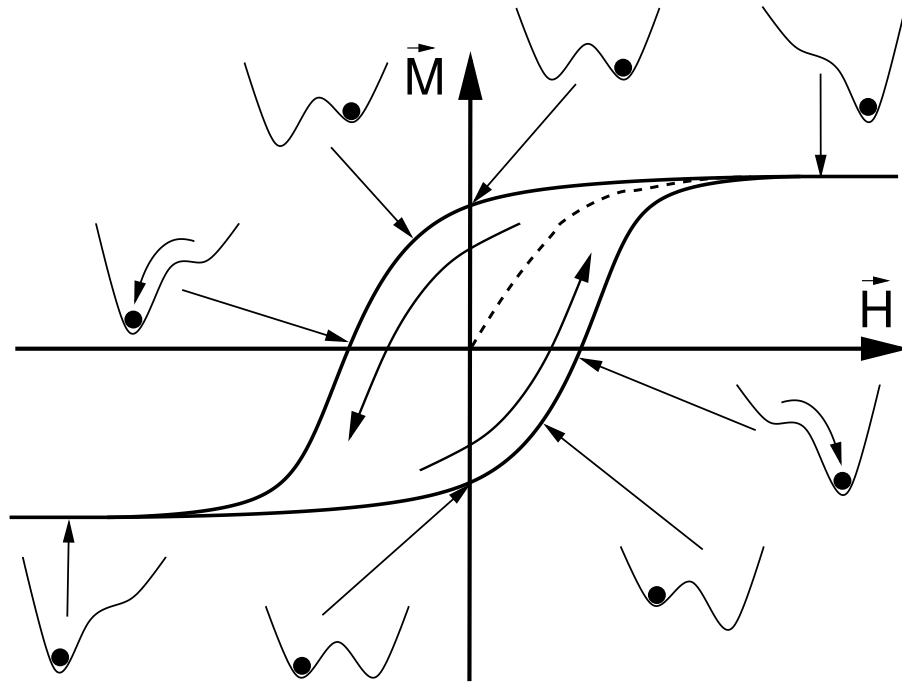


Abb. 7.3: Darstellung einer Hysterese, nämlich die Werte der Magnetisierung als Funktion der Magnetisierung. Eine Hysterese zeichnet sich durch zwei Zweige der Magnetisierung aus. Die eingeblendeten Figuren zeigen die Energie des Materials im Magnetfeld als Funktion der Magnetisierung.

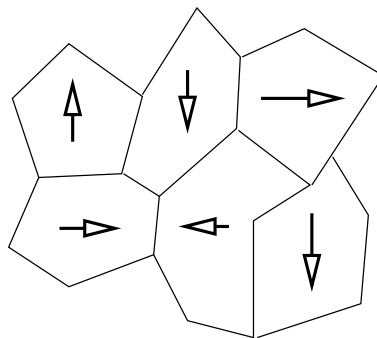


Abb. 7.4: In einem magnetischen Material existieren magnetische Domänen, sogenannte Weissche Bezirke. Die effektive Magnetisierung ergibt sich aus dem Mittelwert der Magnetisierung.



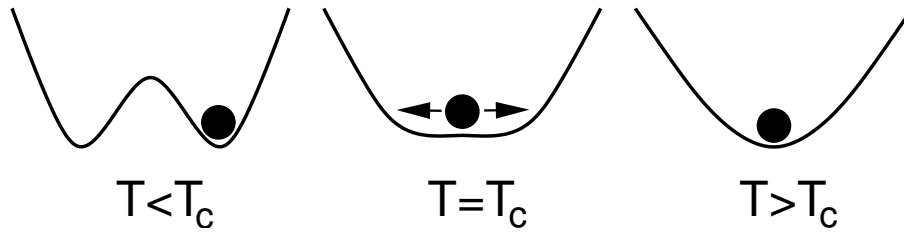


Abb. 7.5: Darstellung eines Phasenübergangs. Die Bilder zeigen die Energie des Materials in Abhängigkeit der Ladungsdichte für Temperatur unterhalb des Phasenübergangs, am Phasenübergang und darüber. Unterhalb der kritischen Temperatur ist die Symmetrie des Materials spontan gebrochen. Es bildet sich eine endliche Magnetisierung aus. Bei einem sogenannten Phasenübergang zweiter Ordnung wachsen die beiden Minima bei der kritischen Temperatur zusammen. Man beobachtet sogenannte kritische Fluktuationen, die man als grosse Fluktuationen mit grossen Wellenlängen beobachten kann. Ein Beispiel ist die kritische Opaleszenz. Oberhalb der kritischen Temperatur liegt nur ein Minimum vor. Ohne angelegtes Magnetfeld verschwindet die Magnetisierung. Ein Magnet verhält sich oberhalb der kritischen Temperatur ähnlich wie ein Paramagnet.

## 7.4 Potentiale in der Materie

Man könnte nun den Eindruck gewinnen, dass man die Potentialtheorie für skalares und magnetisches Potential entsprechend auf die Maxwellgleichungen in der Materie verallgemeinern kann. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall!

Betrachten wir zunächst wo die Verallgemeinerung möglich ist: Es müssen zwei Bedingungen erfüllt sein

- das Material ist homogen. Dies bedeutet, dass Dielektrizitäts- und Induktionskonstanten räumlich und zeitlich konstant sind.
- das Material ist isotrop. Dies bedeutet, dass Dielektrizitäts- und Induktionskonstanten keine Tensoren sondern Skalare sind. Im allgemeinen sind sie als Matrix darstellbar. In isotropen Materialien jedoch sind diese Matrizen gleich der Einheitsmatrix multipliziert mit einer Konstante.

Dies beschreibt eine weite Klasse von Problemen in der Praxis.

**Editor: Der folgende Abschnitt scheint nicht hierherzupassen**

Sind Dielektrizitäts- und Induktionskonstanten räumlich und zeitlich konstant, dann treten deren Ableitungen nicht auf, sodass wir Gleichungen erhalten die direkt mit den Methoden der Elektrodynamik im Vakuum zugänglich sind. Der einzige Unterschied ist, dass die Werte der Dielektrizitäts und Induktionskonstanten einen anderen Wert besitzen. Es ist dann erlaubt ein elektrostatisches Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho_{ext}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (7.25)$$

zu definieren.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{ext} \\ \vec{\nabla} \times \vec{D} + \underbrace{\epsilon\mu}_{1/c^2} \partial_t \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{j}_{ext} \end{aligned}$$

Entdeckte die Curietemperatur und Piezoelektrizität. Verheiratet mit Marie Skłodowska-Curie, mit der er zusammen den Nobelpreis erhielt.

In diesem Fall kann man die elektrische und die magnetische Erregung  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  als äußere elektrische und magnetische Felder ansehen, also die Felder, die von den externen Ladungen und Strömen erzeugt werden. Man kann dann in Analogie der Maxwellgleichungen im Vakuum ein Potential und ein Vektorpotential einführen.

Diese Analogie bricht allerdings zusammen, sobald sich die Dielektrizitäts- und Induktionskonstanten räumlich ändern, weil dann zum Beispiel die Rotation der dielektrischen Erregung selbst im statischen Fall nicht verschwindet. Betrachte zum Beispiel die Divergenz der magnetischen Erregung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \left( \vec{\nabla} \frac{1}{\mu_0} \right) \cdot \vec{B} + \frac{1}{\mu_0} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} \neq 0$$

Deshalb kann die magnetische Erregung nicht als Rotation eines Vektorpotentials beschrieben werden, wenn die Induktionskonstante ortsabhängig ist. Betrachte entsprechend die Rotation der dielektrischen Erregung

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = (\vec{\nabla} \epsilon) \times \vec{E} + \epsilon (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \stackrel{\text{Maxwell}}{=} (\vec{\nabla} \epsilon) \times \vec{E} - \epsilon (\partial_t \vec{B})$$

Da die Rotation selbst in Abwesenheit von magnetischen Feldern nicht verschwindet können wir es, im Gegensatz zum elektrischen Feld, nicht als Gradientenfeld darstellen. Ähnlich verschwindet die Divergenz der magnetischen Erregung

## 7.5 Randbedingungen an Grenzflächen

Die Maxwellgleichungen der Materie lassen sich relativ einfach für Systeme lösen, die räumliche und zeitliche Translationssymmetrie aufweisen. Eine andere Klasse von Problemen, die seltener auftauchen, aber zumindest numerisch durch Fouriertransformation in Raum und Zeit, lösbar sind, sind solche bei denen sich die Materialeigenschaften fließend ändern. Meistens haben Materialien jedoch relativ scharfe Grenzen. Wenn das Problem Unstetigkeiten in den Materialeigenschaften aufweist, löst man das Problem stückweise und passt anschließend die Teillösungen der einzelnen Bereiche aneinander an. Dazu muss man wissen, welche Größen an der Materialgrenze stetig sind und welche nicht. Davon handelt dieses Kapitel.

An Grenzflächen verschiedener Materialien sind sowohl die magnetischen und elektrischen Felder als auch die entsprechenden Erregungen unstetig. Im Folgenden werden wir die (Un)Stetigkeitsbedingungen bestimmen, die es erlauben, die stückweisen Lösungen an der Grenzfläche zusammenzufügen.

**Editor: Hierzu Grafiken!**

- Dazu betrachten wir zunächst

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{ext}$$

Betrachten wir eine Grenzfläche in der x-y Ebene. Wir integrieren die Divergenz über ein infinitesimales quaderförmiges Volumen  $\Omega$  mit den Seiten  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ .

$$\int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \int_{\Omega} d^3r \rho_{ext}$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{\Rightarrow} \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \cdot \vec{D} = \int_{\Omega} d^3r \rho_{ext}$$

Da das Volumen klein ist, können wir die räumliche Variation der dielektrischen Erregung auf jeder Seite des Volumens als konstant annehmen.<sup>7</sup> Sei  $\vec{D}^I$  die elektrische Erregung für  $z > 0$  und  $\vec{D}^{II}$  diejenige für  $z < 0$ . Wegen der Unstetigkeit gilt das aber nicht über die Grenzfläche

<sup>7</sup>Der Beitrag Variation verschwindet im Grenzfall  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$

hinweg, d.h.  $\vec{D}' \neq \vec{D}''$ . Jetzt zerlegen wir das Oberflächenintegral in die 6 Seiten des Quaders. Die vier Seitenteile tragen nichts zum Integral bei, weil die elektrische Erregung auf den jeweils gegenüberliegenden Seiten identisch ist, der Normalenvektor aber sein Vorzeichen ändert. So erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta y D_{\perp}' - \Delta x \Delta y D_{\perp}'' &= \Delta x \Delta y \Delta z \rho \\ D_{\perp}' - D_{\perp}'' &= \Delta z \rho\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $D_{\perp}$  die Komponente senkrecht zur Grenzfläche. Falls keine Oberflächenladungen existieren, verschwindet die rechte Seite beim Grenzübergang  $\Delta z \rightarrow 0$ , sodass

$$D_{\perp}' = D_{\perp}''$$

Oberflächenladungen treten z.B. bei Ferroelektrika auf, sodass hierbei besondere Vorsicht geboten ist.

- Ganz analog erhalten wir aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  die Bedingung

$$B_{\perp}' = B_{\perp}''$$

- Nun betrachten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

Hierbei betrachten wir ein kleines Flächenelement, das senkrecht zur Grenzfläche steht. Wiederum nehmen wir an, dass die Felder stückweise konstant sind. Nun bilden wir das Integral über das Flächenelement und wenden den Stokesschen Satz an, um das Oberflächenintegral in ein Linienintegral umzuwandeln.

$$\begin{aligned}\int d\vec{A} \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\partial A} d\vec{r} \vec{E} &= - \int d\vec{A} \partial_t \vec{B}\end{aligned}$$

Wiederum fallen die Beiträge der Seitenteile im Linienintegral weg, weil die Felder identisch, die Integrationsrichtung umgekehrt ist. Sei das Flächenelement in der x-z Ebene aufgespannt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta x E_x' - \Delta x E_x'' &= \Delta x \Delta z \partial_t B_y \\ \Rightarrow E_x' - E_x'' &= \Delta z \partial_t B_y\end{aligned}$$

Beim Grenzübergang  $\Delta z \rightarrow 0$  verschwindet die rechte Seite und wir erhalten

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel}''$$

Dabei steht  $E_{\parallel}$  für eine beliebige Komponente des elektrischen Feldes, das parallel zur Grenzfläche liegt.

- Analog erhält man aus  $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}$  die Stetigkeitsbedingung

$$H_{\parallel}' = H_{\parallel}''$$

Allerdings gilt diese Bedingung nur in der Abwesenheit von externen Oberflächenströmen. Dies ist bei Ferromagneten von Bedeutung, da die remanente Magnetisierung zu Oberflächenströmen führt.

Zusammenfassen gelten die folgenden Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

#### STETIGKEITSBEDINGUNGEN AN GRENZFLÄCHEN

$$\left. \begin{array}{l} D_{\perp} \\ E_{\parallel} \\ H_{\parallel} \\ B_{\perp} \end{array} \right\} \text{ sind stetig} \quad \left. \begin{array}{l} D_{\parallel} \\ E_{\perp} \\ H_{\perp} \\ B_{\parallel} \end{array} \right\} \text{ sind unstetig}$$

Zu beachten ist besonders bei Ferroelektrika und Ferromagneten wiederum die Einschränkung auf verschwindender Oberflächenladungen und -ströme. **Editor: das ist missverständlich. externe Oberflächenladungen??**

Mit Hilfe dieser Randbedingungen können die Lösungen von beiden Seiten der Grenzfläche zusammengefügt werden.

#### Exkurs: Zerlegung einer superposition lokaler ladungsdichten ind Multipolmomente

**Editor: Nicht fertig. Analog zu Fließbach.**

Wir betrachten eine Ladungsdichte die mit mit Hilfe einer Funktion  $f(\vec{r})$  gemittelt wurde.

$$\bar{\rho}_f(\vec{r}) = \int d^3r' f(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}')$$

Man nennt einen solchen Ausdruck eine Faltung. Das Integral der Funktion  $f(\vec{r})$  sei auf eins normiert.

$$\int d^3r f(\vec{r}) = 1$$

Darüber hinaus soll sie analytisch sein und mit größerem Abstand verschwinden. Betrachten wir eine Folge von Funktionen, deren reichweite immer kürzer wird, erhalten wir die  $\delta$ -Funktion.

Nun betrachten wir eine Ladungsdichte, die aus einzelnen Einheiten  $\rho_n(\vec{r})$  zusammengesetzt sei.

$$\rho(\vec{r}) = \sum_n \rho_n(\vec{r})$$

Die entsprechend gemittelte Funktion ist

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_f(\vec{r}) &= \int d^3r' f(\vec{r} - \vec{r}') \sum_n \rho_n(\vec{r}') \\
 &= \sum_n \int d^3r' \rho_n(\vec{r}') f(\vec{r} - \vec{r}') \\
 &= \sum_n \int d^3r' \rho_n(\vec{r}') \left\{ f(\vec{r} - \vec{r}_n) - (\vec{r}' - \vec{r}_n) \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} [(\vec{r}' - \vec{r}_n) \vec{\nabla}]^2 f(\vec{r} - \vec{r}_n) + O(\vec{r}' - \vec{r}_n)^2 \right\} \\
 &= \sum_n \left\{ f(\vec{r} - \vec{r}_n) \underbrace{\left[ \int d^3r' \rho_n(\vec{r}') \right]}_{q_n} - \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n) \underbrace{\left[ \int d^3r' \rho_n(\vec{r}') (\vec{r}' - \vec{r}_n) \right]}_{\vec{p}_n} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left( [\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n)] \underbrace{\left[ \int d^3r' \rho_n(\vec{r}') (\vec{r}' - \vec{r}_n) \otimes (\vec{r}' - \vec{r}_n) \right]}_{\vec{Q}} \right) + O(\vec{r}' - \vec{r}_n)^2 \right\} \\
 &= \sum_n \left\{ q_n f(\vec{r} - \vec{r}_n) - \vec{p}_n \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n) + \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \vec{Q}^\top \vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}_n)] + O(\vec{r}' - \vec{r}_n)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

## 7.6 Exkurs: Ein klassischer Fall wie es nicht geht.

Das Folgende war ein Versuch, einen systematischen Lösungsweg für die Maxwellgleichungen in der Materie zu finden, vorausgesetzt, dass man das entsprechende Problem im Vakuum lösen kann. Dieses Kapitel ist also nur für Leser, die aus Fehlern lernen möchten. Ansonsten ist es nutzlos.

Das Problem ist, dass man wieder auf Differentialgleichungen geleitet wird, die zunehmend schwieriger anstelle von einfacher werden. Das ist anfangs schwer abzusehen.

- bestimme die externen Felder aus den Maxwellgleichungen im Abwesenheit des Materials

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \epsilon_0 \vec{E}_{ext} &= \rho_{ext} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}_{ext} + \partial_t \vec{B}_{ext} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{ext} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{ext} - \partial_t \epsilon_0 \vec{E}_{ext} &= \vec{j}_{ext}
 \end{aligned}$$

Die Allgemeine Lösungen für die internen Felder sind noch unbestimmt und wird durch das momentan frei wählbare Vektorfeld  $\vec{F}$  und das skalare Feld  $G(\vec{r})$  beschrieben. Später werden wir noch eine Bedingung für diese Felder erhalten, die dann das Problem darstellen.

- Die internen Felder bestimmt man sich aus

$$\left. \begin{aligned} \rho_{int} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \rho_{int} &= \vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E}_{int} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_{int} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{j}_{int} &= \vec{\nabla} \times \vec{M} - \partial_t \vec{P} \\ \vec{j}_{int} &= \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{int} + \partial_t \epsilon_0 \vec{E}_{int} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{B}_{int} = \mu_0 \vec{M} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{F} + \vec{\nabla} G$$

- Dies gibt uns einen Ausdruck für die gesamten Felder

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{ges} &= \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int} = \vec{E}_{ext} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{F} \\
 \vec{B}_{ges} &= \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{int} = \vec{B}_{ext} + \mu_0 \vec{M} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{F} + \vec{\nabla} G
 \end{aligned}$$

- Nun nutzen wir die Zustandsgleichungen, um Polarisierung und Magnetisierung durch die gesamten Felder auszudrücken und sie damit aus der obigen Gleichung zu eliminieren.

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{ges} \\ \vec{M} &= \chi_m \vec{H}_{ges} = \chi_m \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{ges} - \vec{M} \right) \\ \Rightarrow \vec{M} &= \frac{1}{\mu_0(1 + \chi_m)} \vec{B}_{ges}\end{aligned}$$

Wir setzen das Resultat ein

$$\begin{aligned}\vec{E}_{ges} &= \vec{E}_{ext} - \chi_e \vec{E}_{ges} + \vec{\nabla} \times \vec{F} \\ \vec{B}_{ges} &= \vec{B}_{ext} + \frac{1}{(1 + \chi_m)} \vec{B}_{ges} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{F} + \vec{\nabla} G\end{aligned}$$

und lösen nach den gesamten Feldern auf

$$\begin{aligned}\vec{E}_{ges} &= \frac{1}{1 + \chi_e} \left[ \vec{E}_{ext} + \vec{\nabla} \times \vec{F} \right] \\ \vec{B}_{ges} &= \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} \left[ \vec{B}_{ext} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{F} + \vec{\nabla} G \right]\end{aligned}$$

- Schließlich müssen wir das Vektorfeld  $\vec{F}$  und das skalare Feld  $G$  bestimmen. Dazu setzen wir die gesamten Felder in die Maxwellgleichungen Gl. 3.2 und Gl. 3.3 ein, die ja auch erfüllt sein müssen.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{ges} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} \left[ \vec{B}_{ext} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{F} + \vec{\nabla} G \right] &= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}_{ges} + \partial_t \vec{B}_{ges} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \frac{1}{1 + \chi_e} \left[ \vec{E}_{ext} + \vec{\nabla} \times \vec{F} \right] + \partial_t \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} \left[ \vec{B}_{ext} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{F} + \vec{\nabla} G \right] &= 0\end{aligned}$$

- Wir können die beiden Felder zusammenfassen.

$$\dot{\vec{K}} \stackrel{\text{def}}{=} -\epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{F} + \vec{\nabla} G$$

und erhalten mit

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \dot{\vec{K}} &= -\epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{F} \\ \vec{\nabla} \times \dot{\vec{K}} &= -\epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{F}\end{aligned}$$

(Achtung! Integrationskonstante!)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} \left[ \vec{B}_{ext} + \partial_t \vec{K} \right] &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \frac{1}{1 + \chi_e} \left[ \vec{E}_{ext} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{K} \right] + \partial_t \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} \left[ \vec{B}_{ext} + \partial_t \vec{K} \right] &= 0\end{aligned}$$

- und so weiter und so weiter.....

## Chapter 8

### Freie Felder (2h)

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, dass weder Ladungen noch Ströme vorhanden sind. Daraus resultieren die homogenen Maxwellgleichungen. Die Lösungen beschreiben elektromagnetische Strahlung. Elektromagnetische Strahlung hat, je nach Wellenlänge, die Eigenschaften von Radiowellen, Mikrowellen, Wärmestrahlung oder Infrarotlicht (i.r. Strahlung), sichtbarem Licht, ultraviolettem (UV) Licht oder Röntgenstrahlung.

|                  | $\lambda[\text{m}]$            | $\omega[\text{Hz}]$        | $\hbar\omega[\text{eV}]$    |
|------------------|--------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| AM Radiowellen   | $6 - 2 \times 10^2$            | $0.5 - 1.5 \times 10^6$    | $2 - 6 \times 10^{-9}$      |
| Kurzwellenradio  | 187-5.55                       | $1.605 - 54 \times 10^6$   | $6.6 - 220 \times 10^{-9}$  |
| FM Radiowellen   | $5.55 - 0.187$                 | $54 - 1600 \times 10^6$    | $0.22 - 6.6 \times 10^{-6}$ |
| Mikrowellen      | $187 - 10 \times 10^{-3}$      | $1.6 - 30 \times 10^9$     | $6.6 - 120 \times 10^{-6}$  |
| Infrarotlicht    | $10^{-3} - 750 \times 10^{-9}$ | $0.3 - 400 \times 10^{12}$ | 0.0012-1.65                 |
| Sichtbares Licht | $750 - 400 \times 10^{-9}$     | $400 - 750 \times 10^{12}$ | 1.65 - 3.1                  |
| UV-Strahlung     | $400 - 10 \times 10^{-9}$      | $0.75 - 30 \times 10^{15}$ | 3.1 - 124                   |
| Gammastrahlung   | $\leq 10^{-12}$                | $> 10^{20}$                | $> 10^6$                    |

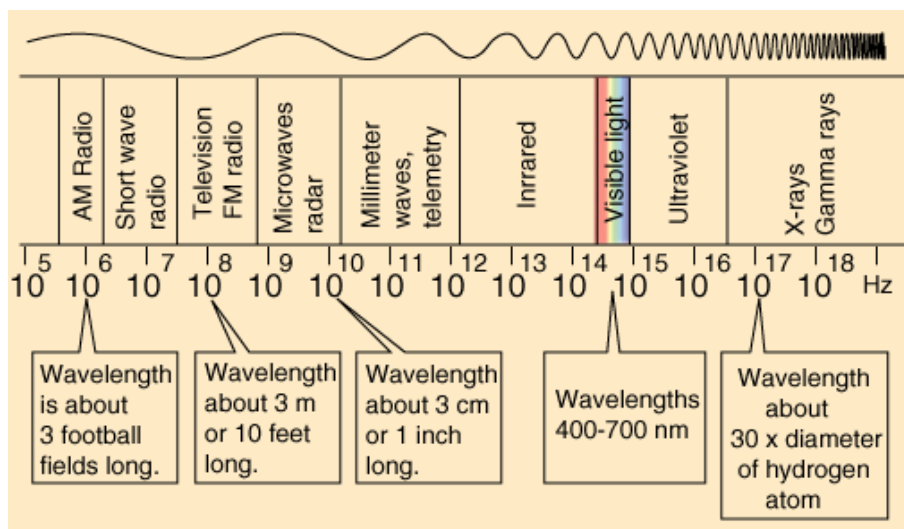


Abb. 8.1: Source:<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/>

## 8.1 Wellenpakete, Gruppen und Phasengeschwindigkeit

Bevor wir uns mit elektromagnetischen Wellen beschäftigen, wollen wir allgemeine Eigenschaften von Wellenpaketen erkunden.

Betrachten wir zunächst ein Wellenpaket

$$\Psi(\vec{r}, t) = \chi(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega(\vec{k}_0)t)} \quad (8.1)$$

wobei  $\chi(\vec{r}, t)$  eine Umhüllungsfunktion ist, die sich nur langsam im Raum verändert.

Ist die Dispersionsrelation  $\omega(\vec{k})$  bekannt, dann lässt sich die Wellenfunktion auch aus Partiallösungen aufbauen.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega(k)t)}$$

Durch Vergleich mit Gl. 8.1 erhalten wir einen Ausdruck für die Umhüllungsfunktion

$$\begin{aligned} \chi(\vec{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega(k)t)} e^{-i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega(k_0)t)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A(\vec{k}) \exp \left( i \left[ (\vec{k} - \vec{k}_0) \vec{r} - \underbrace{(\omega(k) - \omega(k_0))}_{(\vec{k} - \vec{k}_0) \vec{\nabla}_k \omega(k) + O(k - k_0)^2} t \right] \right) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A(\vec{k}) \exp \left( i \left[ (\vec{k} - \vec{k}_0) (\vec{r} - \vec{\nabla}_k \omega(k)t) + O(\vec{k} - \vec{k}_0)^2 \right] \right) \end{aligned}$$

Wenn die Umhüllungsfunktion im Realraum hinreichend glatt ist, dann trägt ihre Fouriertransformierte  $A(k)$  nur bei  $k = 0$  wesentlich bei. Deshalb können die Terme höherer Ordnung in  $\vec{k} - \vec{k}_0$  in erster Näherung vernachlässigt werden.

Daraus resultiert, dass

$$\chi(\vec{r}, t) \approx \chi(\vec{r} - \vec{v}_g t, 0)$$

wobei  $\vec{v}_g$  die sogenannte Gruppengeschwindigkeit ist.

### Definition 8.1 GRUPPENGESCHWINDIGKEIT

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit der Umhüllungsfunktion eines Wellenpakets. Die Richtung der Gruppengeschwindigkeit von Licht legt die Richtung eines Lichtstrahls fest.

$$\vec{v}_g \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \quad \Leftrightarrow \quad v_{g,i} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$$

Die Gruppengeschwindigkeit hängt vom dominanten Wellenvektor  $\vec{k}_0$  des Wellenpakets ab.

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit mit der sich das gesamte Wellenpaket, d.h. seine Umhüllende, bewegt. Tragen verschiedene Wellenvektoren zum Wellenpakete bei, dann gibt es keine einheitliche Gruppengeschwindigkeit, sodass das Wellenpaket zerfließt. Der Grund für dieses Auseinanderfließen ist, dass sich unterschiedliche Anteile des Wellenpakets mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen.

Im Gegensatz dazu ist die Phasengeschwindigkeit, die Geschwindigkeit eines einzelnen Wellenberges. Betrachten wir dazu den Phasenfaktor

$$e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega(\vec{k})t)} = e^{i\vec{k} \left( \vec{r} - \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{\omega}{|\vec{k}|} t \right)}$$

Die Welle selber bewegt sich also mit der



**Definition 8.2 PHASENGESCHWINDIGKEIT**

Die Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Wellenbergs, bzw. eines Wellentals. Die Phasengeschwindigkeit steht also auch senkrecht auf einem Wellenberg. Die Richtung der Phasengeschwindigkeit ist mit der des Wellenvektors identisch.

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{\omega(\vec{k})}{|\vec{k}|} \Rightarrow |\vec{v}_p| = \frac{\omega(\vec{k})}{|\vec{k}|}$$

Der Faktor  $\vec{k}/|\vec{k}|$  ist der Einheitsvektor, der die Richtung der Bewegung angibt. Die Phasengeschwindigkeit hängt vom dominanten Wellenvektor  $\vec{k}_0$  des Wellempakets ab.

Ist die Dispersionsrelation  $\omega(\vec{k})$  einer Welle bekannt, so erhält man daraus sowohl die Gruppen- als auch die Phasengeschwindigkeit. Es ist zu beachten, dass sich Gruppen- und Phasengeschwindigkeit sowohl in Richtung als auch in Betrag unterscheiden können.

Die Terme, die wir vernachlässigt haben, führen dazu, dass sich die Umhüllungsfunction mit der Zeit verbreitert. Dies kommt daher, dass das Wellenpaket aus unterschiedlichen Partialwellen aufgebaut ist, von denen jedes eine eigene Gruppengeschwindigkeit hat. Ist die Dispersionsrelation linear, dann bleibt die Form des Wellenpakets erhalten, was für eine Signalübertragung wesentlich ist. Dies ist gerade bei der elektromagnetischen Strahlung der Fall.

## 8.2 Licht

In Abwesenheit von Strömen und Ladungen haben die Maxwellgleichungen Gl. 3.1-3.4 die Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind translationssymmetrisch in Raum und Zeit, was es nahelegt die Maxwellgleichungen zu Fourier-transformieren. Dazu wählen wir den Ebenen-Wellen Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \int d^3k \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \int d^3k \vec{D}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \int d^3k \vec{H}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \int d^3k \vec{B}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

Wir integrieren nicht über  $\omega$ , weil sich die Kreisfrequenz  $\omega$  später als eindeutige Funktion des Wellenvektors herausstellen wird.

In der Fouriertransformation wird jeder Gradient in einen Faktor  $i\vec{k}$  und jede Zeitableitung in einen Faktor  $-i\omega$  umgewandelt. Dies soll am Beispiel einer skalaren Funktion dargestellt werden:

$$\begin{aligned}f(\vec{r}, t) &= \int d^3k f(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{\nabla} f(\vec{r}, t) &= \int d^3k f(\vec{k}) \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \int d^3k i\vec{k} f(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \partial_t f(\vec{r}, t) &= \int d^3k f(\vec{k}) \partial_t e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \int d^3k (-i\omega) f(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

Schließlich muss man wissen, dass eine Funktion nur dann im ganzen Raum verschwindet, wenn alle seine Fourierkomponenten verschwinden, d.h.

$$\int d^3k f(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f(\vec{k}) \equiv 0$$

Dies folgt daraus, dass die Ebenen Wellen linear unabhängig sind.

Nun setzen wir diesen Ansatz in die freien Maxwellgleichungen ein und erhalten ein algebraische Gleichungssystem für die Fourierkomponenten der Felder.

$$\vec{k}\vec{D}(\vec{k}) = 0 \quad (8.2)$$

$$\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}) - \omega \vec{B}(\vec{k}) = 0 \quad (8.3)$$

$$\vec{k}\vec{B}(\vec{k}) = 0 \quad (8.4)$$

$$\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}) + \omega \vec{D}(\vec{k}) = 0 \quad (8.5)$$

- Aus der ersten Maxwellgleichung Gl. 8.2 folgt, dass der Wellenvektor senkrecht auf der elektrischen Erregung  $\vec{D}$  steht.

$$\vec{k}\vec{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{D}$$

- Aus der zweiten Maxwellgleichung Gl. 8.3 erhalten wir eine Beziehung zwischen Magnetfeld und elektrischem Feld.

$$\vec{k} \times \vec{E} - \omega \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} \quad (8.6)$$

Wir erkennen darüber hinaus, dass das magnetische Feld  $\vec{B}$  senkrecht auf dem elektrischen Feldvektor  $\vec{E}$  und auf dem Wellenvektor  $\vec{k}$  steht.

$$\Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}; \quad \vec{B} \perp \vec{E}$$

- Aus der dritten Maxwellgleichung Gl. 8.4 lernen wir nur nochmals, dass das Magnetfeld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht.

$$\vec{k}\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$$

- Aus der letzten Gleichung Gl. 8.5 erhalten wir einen Zusammenhang zwischen den elektrischen und magnetischen Erregungen

$$\vec{D}(\vec{k}) = -\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{H}(\vec{k}) \quad (8.7)$$

Wir erkennen darüber hinaus, dass die dielektrische Erregung  $\vec{D}$  senkrecht auf der magnetischen Erregung  $\vec{H}$  und auf dem Wellenvektor  $\vec{k}$  steht.

$$\Rightarrow \vec{D} \perp \vec{k}; \quad \vec{D} \perp \vec{H}$$

#### AUSRICHTUNG DER FELDER IN EINER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLE

Wir erhalten also die folgenden Beziehungen für die Richtungen der Feldvektoren, die auch in Fig. 8.2 nochmals zusammengestellt sind.

$$\begin{array}{ll} \vec{D} \perp \vec{k} & \vec{B} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{E} & \vec{D} \perp \vec{H} \end{array}$$

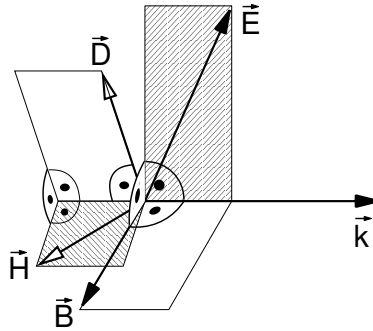


Abb. 8.2: Stellung der Felder relativ zum Wellenvektor  $\vec{k}$  und relativ zueinander. Die Winkel mit den Punkten geben rechte Winkel an. Magnetfeld und dielektrische Erregung stehen senkrecht zum Wellenvektor. Der Winkel untereinander ist jedoch materialspezifisch. Das elektrische Feld steht senkrecht auf dem Magnetfeld. Es steht aber nicht senkrecht zum Wellenvektor sondern ist in oder entgegen der Richtung des Wellenvektors verkippt. Ähnlich verhält sich die magnetische Erregung zur dielektrischen Verschiebung. Im Falle isotroper Medien ist außerdem  $\vec{H} \parallel \vec{B}$  und  $\vec{E} \parallel \vec{D}$ , sodass alle Felder senkrecht auf dem Wellenvektor stehen und ein rechtwinkliges Dreiein bilden.

Anhand der Winkelbeziehungen erkennen wir, dass es zwei unabhängige Polarisationsrichtungen gibt: Zeigt der Wellenvektor in z-Richtung, dann kann die dielektrische Erregung sowohl in die x-Richtung oder die y-Richtung zeigen. Beides sind unabhängige Lösungen der Maxwellgleichungen. Man nennt diese Partiallösungen **linear polarisiert**. Die Polarisierung wird durch einen Polarisationsvektor  $\vec{e}_D$  ausgedrückt, der senkrecht auf dem Wellenvektor stehen muss und die Richtung der dielektrischen Erregung beschreibt.

Die Dispersionsrelation  $\omega(\vec{k})$  erhalten wir durch Kombination von Gl. 8.6 und Gl. 8.7 mit den Zustandsgleichungen.

$$\begin{aligned}
 \vec{D} &\stackrel{\text{Gl. 8.7}}{=} -\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{H} \stackrel{\text{Gl. 3.6}}{=} -\frac{\vec{k}}{\omega} \times (\mu^{-1} \vec{B}) \\
 &\stackrel{\text{Gl. 8.6}}{=} -\frac{\vec{k}}{\omega} \times \left( \mu^{-1} \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} \right) \right) \stackrel{\text{Gl. 3.5}}{=} -\frac{\vec{k}}{\omega} \times \left( \mu^{-1} \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \times (\epsilon^{-1} \vec{D}) \right) \right) \\
 \omega^2 \vec{e}_D &\stackrel{\vec{D}=|\vec{D}|\vec{e}_D}{=} -\vec{k} \times \left( \mu^{-1} \left( \vec{k} \times (\epsilon^{-1} \vec{e}_D) \right) \right) \\
 \omega^2 &= -\vec{e}_D \left( \vec{k} \times \left( \mu^{-1} \left( \vec{k} \times (\epsilon^{-1} \vec{e}_D) \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber machen wir jetzt die Annahme, dass das Material nicht nur räumlich und zeitlich homogen sondern auch isotrop ist. Dies ist bis auf Einkristalle eine hinreichend gute Näherung. Selbst ein polykristallines Material wird für Licht isotrop erscheinen, solange die Kristallite deutlich kleiner als die Wellenlänge des Lichts ist. Die Dielektrizitäts- und die Induktionskonstante eines isotropen Materials ist proportional zur Einheitsmatrix. In einem solchen Fall werden die Konstanten durch skalare Größen ersetzt.

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= -\frac{1}{\epsilon\mu} \vec{e}_D \left( \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{e}_D) \right) \\
 &\stackrel{\text{Gl. C.8}}{=} -\frac{1}{\epsilon\mu} \vec{e}_D \left( \underbrace{\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{e}_D)}_{=0} - \vec{e}_D \vec{k}^2 \right) \\
 \Rightarrow \omega(k) &= \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} |\vec{k}|
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Dispersionsrelation der elektromagnetischen Strahlung in isotropen und homogenen Materialien. Wellenpakete der elektromagnetischen Strahlung breiten sich also immer mit der Lichtgeschwindigkeit  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial |\vec{k}|} = c$  aus.

### LICHTGESCHWINDIGKEIT

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \quad (8.8)$$

Das Symbol  $c$  steht im Allgemeinen für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Die Lichtgeschwindigkeit in Materialien  $c_{mat} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$  ist kleiner als im Vakuum.

In einem isotropen Material bilden  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , und  $\vec{k}$  ein rechtwinkliges Dreiein. Für eine gegebene Ausbreitungsrichtung gibt es daher nur zwei unabhängige Richtungen für das elektrische Feld. Diese beiden Richtungen beschreibt man durch die **Polarisation** des Lichts. Mit einem Polarisationsfilter kann man eine Polarisationsrichtung ausblenden. Ein Polarisationsfilter besteht aus Kettenmolekülen, die parallel ausgerichtet sind. Diese Kettenmoleküle absorbieren Licht deren elektrisches Feld parallel zu den Ketten ausgerichtet ist, aber nicht eines, dessen elektrisches Feld senkrecht zu den Ketten steht.

Es mag lehrreich sein, die Dispersionsrelation des Lichts mit der eines relativistischen Teilchens

$$E = \pm \sqrt{m_0 c^4 + p^2 c^2}$$

zu vergleichen. Dieser Vergleich ist durch das Korrespondenzprinzip

$$E = \hbar \omega \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

der Quantenmechanik möglich, das wir hier ohne Herleitung verwenden. Licht hat demnach die Dispersionsrelation

$$E = \pm c \vec{p}$$

Die Dispersionsrelation von Licht ist also identisch mit der eines relativistischen Teilchens ohne Masse. Aus der Dispersionsrelation folgt also, dass die Photonen, die Lichtteilchen, masselos sind

### 8.2.1 Stärke des magnetischen Feldes im Lichtstrahl

In einem Lichtstrahl ist das magnetische Feld viel schwächer als das elektrische Feld. Wie man die Stärke von elektrischen und magnetischen Feldern vergleicht, wird im folgenden gezeigt.

Wir betrachten wieder nur isotrope Materialien in denen die Felder mit dem Wellenvektor ein orthogonales Dreiein bilden.

$$\vec{k} \times \vec{E} - \omega \vec{B} \stackrel{\text{Gl. 8.3}}{=} 0 \quad \vec{E} \perp \vec{k} \perp \vec{B} \quad |\vec{B}| = \frac{|\vec{k}|}{\omega} |\vec{E}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|$$

Um die Stärke zu vergleichen betrachten wir die Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen. Die magnetischen Felder verursachen in einem Lichtstrahl Kräfte auf ein bewegtes Teilchen mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , die um einen Faktor  $|\vec{v}|/c$  kleiner als die des elektrischen Feldes sind. Für ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit von etwa 1000 km/h ist die von Magnetfeld verursachte Kraft eine Million mal kleiner als die von elektrischen Feld verursachte Kraft.

### 8.2.2 Brechungsgesetz (Selbststudium)

Wir betrachten die Grenzfläche von zwei isotropen Medien. Ein Lichtstrahl wird auf die Grenzfläche geworfen. An der Grenzfläche wird ein Teil des Strahls reflektiert, also zurückgeworfen, der andere gebeugt.

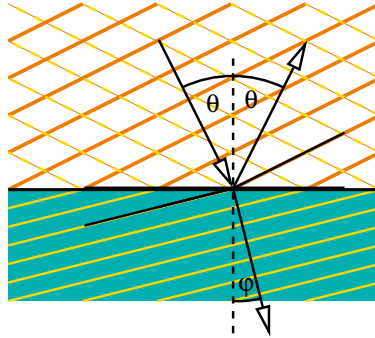


Abb. 8.3: Brechungsgesetz.

Wir spalten den einfallenden Wellenvektor in eine Komponente,  $k_{1,\perp}$  senkrecht zur Oberfläche und eine parallel dazu,  $k_{1,\parallel}$  auf. Genauso verfahren wir mit dem gebogenen Strahl, was  $k_{2,\perp}$  und  $k_{2,\parallel}$  definiert. Es sei  $\varphi_1$  der Winkel des einfallenden Strahls zur Oberflächennormale und  $\varphi_2$  der Winkel des gebogenen Strahls zur Oberflächennormale. Es gilt also

$$\begin{aligned} k_{1,\parallel} &= \sin(\varphi_1) |\vec{k}_1| \\ k_{2,\parallel} &= \sin(\varphi_2) |\vec{k}_2| \end{aligned}$$

Die Winkelbeziehungen ergeben sich direkt aus den Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Materialien und den Stetigkeitsbedingungen der Felder. Die Wellenberge des einfallenden, des gebogenen und des reflektierten Strahls müssen wegen der Stetigkeitsbeziehungen an der Grenzfläche zusammenfallen. Das bedeutet, dass die Komponenten der Wellenvektoren parallel zur Grenzfläche identisch sein müssen, d.h.  $k_{1,\parallel} = k_{2,\parallel}$ .

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_1) |\vec{k}_1| &= k_{1,\parallel} = k_{2,\parallel} = \sin(\varphi_2) |\vec{k}_2| \\ \sin(\varphi_1) &= \sin(\varphi_2) \frac{|\vec{k}_2|}{|\vec{k}_1|} \end{aligned}$$

Zusätzlich ist die Frequenz der beiden Strahlen identisch, da sie sonst an der Grenzfläche nicht mehr zeitlich synchron oszillieren, d.h.  $\omega_1(|k_1|) = \omega_2(|k_2|)$ .

$$\begin{aligned} c_1 |\vec{k}_1| &= \omega_1(\vec{k}_1) = \omega_2(\vec{k}_1) = c_2 |\vec{k}_2| \\ \frac{|\vec{k}_2|}{|\vec{k}_1|} &= \frac{c_1}{c_2} \\ \sin(\varphi_1) &= \sin(\varphi_2) \frac{c_1}{c_2} \\ \frac{c_{vac}}{c_1} \sin(\varphi_1) &= \frac{c_{vac}}{c_2} \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber hat man den Brechungsindex eingeführt.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Historisch wurde der Brechungsindex empirisch eingeführt bevor die endliche Lichtgeschwindigkeit bekannt war.

**Definition 8.3 BRECHUNGSINDEX**

Der Brechungsindex eines Materials ist das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit Vakuum und im Material.

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \frac{c_{vac}}{c_{Mat}} \quad (8.9)$$

Man nennt ein Material mit einem größeren Brechungsindex optisch dichter als eines mit einem niedrigeren Brechungsindex. Der Brechungsindex ist immer größer als eins, da sich Signale in einem Material sonst schneller als die Vakuumlichtgeschwindigkeit ausbreiten könnten.

Damit erhalten wir die endgültige Form des Brechungsgesetzes für die Winkelbeziehungen.

**BRECHUNGSGESETZ**

Sind  $n_1$  und  $n_2$  die Brechungsindizes von zwei Materialien dann gelten für die folgenden Winkelbeziehungen zwischen einfallendem und gebeugten Strahl

$$n_1 \sin(\varphi_1) = n_2 \sin(\varphi_2) \quad (8.10)$$

wobei  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Winkel sind die der entsprechende Strahl mit der Oberflächennormale einschließt.

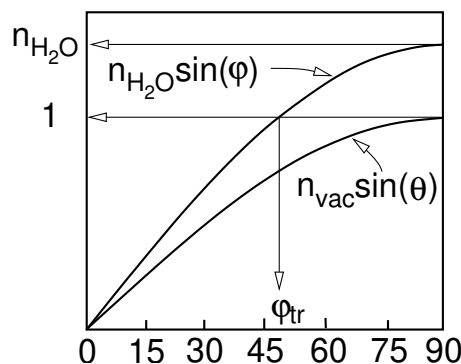


Abb. 8.4: Winkelbeziehung des Brechungsgesetzes für Wasser im Frequenzbereich sichtbaren Lichts. Den Beugungswinkel für den Eintritt des Lichts von Luft in Wasser erhält man, indem den Wert der Vakuumkurve  $n_{vac} \sin(\theta)$  für den gegebenen Einfallswinkel  $\theta$  sucht, und horizontal auf die Kurve von Wasser  $n_{H_2O} \sin(\phi)$  übergeht. Der zugehörige Winkel ist dann der Beugungswinkel. Für einen Strahl der aus dem Wasser in Luft Eintritt, sucht man sich zunächst den Wert der wasserkurve und schlägt den Winkel nach, für den die Vakuumkurve denselben Wert besitzt. Der Winkel  $\varphi_{tr}$  ist der Winkel der Totalreflexion.

Abb. 8.4 illustriert das Brechungsgesetz. Das Diagramm ist nützlich um Fische zu fangen. Ein Fisch hat nach oben nur einen Sichtwinkel von  $\pm 45^\circ$ . Bei größeren Winkeln spiegelt sich der Grund. Dennoch hat der Fisch den kompletten Überblick. Wie in einem Weitwinkelobjektiv wird das gesamte Gesichtsfeld in den Bereich hineingebrochen. (Das kann man beim nächsten Badeurlaub überprüfen. Will man einen Fisch mit der Hand fangen, muss man berücksichtigen, dass der Fisch weiter weg erscheint als er tatsächlich ist.

**8.2.3 Selbststudium: Lichtgeschwindigkeit in anisotropen Materialien**

**Editor: das ist noch nicht fertig!**

Wir untersuchen nun die Lichtgeschwindigkeit in anisotropen Materialien. Dabei beginnen wir mit Gl. 8.8:

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= - \underbrace{\vec{e}_D}_{\vec{a}} \left( \underbrace{\vec{k}}_{\vec{b}} \times \underbrace{\left( \boldsymbol{\mu}^{-1} \left( \vec{k} \times (\epsilon^{-1} \vec{e}_D) \right) \right)}_{\vec{c}} \right) \\
 &\stackrel{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})}{=} \left( \boldsymbol{\mu}^{-1} \left( \vec{k} \times (\epsilon^{-1} \vec{e}_D) \right) \right) \cdot \underbrace{(\vec{k} \times \vec{e}_D)}_{-\vec{a} \times \vec{b}} \\
 &= \underbrace{(\vec{k} \times \vec{e}_D)}_{\vec{e}_B |\vec{k}|} \boldsymbol{\mu}^{-1} \left( \vec{k} \times (\epsilon^{-1} \vec{e}_D) \right) \\
 &= \left( \boldsymbol{\mu}^{-1, \top} \left( \vec{k} \times \vec{e}_D \right) \right) \left( \vec{k} \times (\epsilon^{-1} \vec{e}_D) \right) \\
 &= \vec{k} \left[ (\epsilon^{-1} \vec{e}_D) \times \left( \boldsymbol{\mu}^{-1, \top} \left( \vec{k} \times \vec{e}_D \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Nun stellen wir das Kreuzprodukt durch den Levi-Civita Tensor dar, also  $\epsilon_{i,j,k}$  dar, d.h.  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} a_j b_k$ .

$$\begin{aligned}
 \omega^2(\vec{k}) &= \sum_{i,j,k,\ell,m,n,o} k_i \left[ \epsilon_{i,j,k} \left( \epsilon_{j,\ell}^{-1} e_{D,\ell} \right) \left( \mu_{k,m}^{-1} (\epsilon_{m,n,o} k_n e_{D,o}) \right) \right] \\
 &= \sum_{i,\ell,n,o} \left[ \sum_{j,k,m} \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{j,\ell}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \epsilon_{m,n,o} \right] e_{D,\ell} e_{D,o} k_n k_i
 \end{aligned}$$

Wir sehen also dass die Frequenz des Lichts sowohl von der Richtung des Wellenvektors als auch von der Polarisationsrichtung abhängt. Daraus folgt, dass die Strahlrichtung von der des Wellenvektors abweichen kann. bei der Herleitung des Brechungsgesetzes für anisotrope Medien muss dieser Unterschied beachtet werden.

Schließlich erhalten wir die Gruppengeschwindigkeit, also die Lichtgeschwindigkeit als

$$\begin{aligned}
 2\omega \frac{d\omega}{dk_p} &= \sum_{i,\ell,o} \left[ \sum_{j,k,m} \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{j,\ell}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \epsilon_{m,p,o} \right] e_{D,\ell} e_{D,o} k_i + \sum_{\ell,n,o} \left[ \sum_{j,k,m} \epsilon_{p,j,k} \epsilon_{j,\ell}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \epsilon_{m,n,o} \right] e_{D,\ell} e_{D,o} k_n \\
 &= \sum_{n,\ell,o} \left[ \sum_{j,k,m} \epsilon_{n,j,k} \epsilon_{j,\ell}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \epsilon_{m,p,o} \right] e_{D,\ell} e_{D,o} k_n + \sum_{\ell,n,o} \left[ \sum_{j,k,m} \epsilon_{p,j,k} \epsilon_{j,\ell}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \epsilon_{m,n,o} \right] e_{D,\ell} e_{D,o} k_n \\
 &= \sum_{n,\ell,o} \left[ \sum_{j,k,m} \left( \epsilon_{n,j,k} \epsilon_{j,\ell}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \epsilon_{m,p,o} + \epsilon_{p,j,k} \epsilon_{j,\ell}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \epsilon_{m,n,o} \right) \right] e_{D,\ell} e_{D,o} k_n \\
 &= \sum_{n,\ell,o} \left[ \sum_{j,k,m} (\epsilon_{p,o,m} \epsilon_{n,j,k} + \epsilon_{p,j,k} \epsilon_{n,o,m}) \epsilon_{j,\ell}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \right] e_{D,\ell} e_{D,o} k_n
 \end{aligned}$$

Das Resultat ist nicht sehr übersichtlich weshalb wir ein spezielles Koordinatensystem wählen. Sei

$\vec{k} = |\vec{k}|\vec{e}_3$  und  $\vec{e}_D = \vec{e}_1$ .

$$\begin{aligned}
 2\omega \frac{d\omega}{dk_p} &= \left[ \sum_{j,k,m} (\epsilon_{p,1,m} \epsilon_{3,j,k} + \epsilon_{p,j,k} \epsilon_{3,1,m}) \epsilon_{j,1}^{-1} \mu_{k,m}^{-1} \right] |\vec{k}| \\
 &= \left[ \sum_{j,k,m} \left( \epsilon_{p,1,m} \epsilon_{3,1,2} \epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,m}^{-1} + \epsilon_{p,1,m} \epsilon_{3,2,1} \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,m}^{-1} + \epsilon_{p,j,k} \epsilon_{3,1,2} \epsilon_{j,1}^{-1} \mu_{k,2}^{-1} \right) \right] |\vec{k}| \\
 &= \left[ \sum_m \epsilon_{p,1,m} (\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,m}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,m}^{-1}) + \sum_{j,k} \epsilon_{p,j,k} \epsilon_{j,1}^{-1} \mu_{k,2}^{-1} \right] |\vec{k}|
 \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die einzelnen Komponenten der Geschwindigkeit und nutzen die Kreisfrequenz

$$\omega = \pm \sqrt{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}} |\vec{k}|$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega}{dk_1} &= \pm \frac{\epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{3,2}^{-1} - \epsilon_{3,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1}}{2\sqrt{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}} \\
 \frac{d\omega}{dk_2} &= \pm \frac{-\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,3}^{-1} + \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,3}^{-1} - \epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{3,2}^{-1} + \epsilon_{3,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}{2\sqrt{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}} \\
 &= \pm \frac{-\epsilon_{1,1}^{-1} (\mu_{2,3}^{-1} + \mu_{3,2}^{-1}) + \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,3}^{-1} + \epsilon_{3,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}{2\sqrt{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}} \\
 \frac{d\omega}{dk_3} &= \pm \frac{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1} + \epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}{2\sqrt{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}} \\
 &= \pm \frac{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}{\sqrt{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}} = \pm \sqrt{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1} - \epsilon_{2,1}^{-1} \mu_{1,2}^{-1}}
 \end{aligned}$$

Für den Spezialfall, dass die Induktionskonstante isotrop und nur die Dielektrizitätskonstante anisotrop ist, verschwinden die ersten beiden Komponenten und für die Komponente parallel zum Wellenvektor erhalten wir

$$\frac{d\omega}{dk_3} = \sqrt{\epsilon_{1,1}^{-1} \mu_{2,2}^{-1}} k_3$$

## 8.3 Dipolstrahlung

## 8.4 Übungen

### 8.4.1 Tintenfisch auf der Jagd

Die meisten Fische haben einen weißen Bauch damit sie nicht gegenüber der hellen Wasseroberfläche auffallen. Bestimmte Tintenfische können die Polarisationsrichtung unterscheiden. Nur eine bestimmte Polarisationsrichtung wird vorzugsweise in das Wasser gebrochen. Bestimme den Winkel relativ zur Sonne und der Wasseroberfläche in die der Tintenfisch blicken muss und die Polarisationsrichtung, die er auswählen muss, damit ihm Fische mit hellem Bauch am besten auffallen.



## Chapter 9

# Eichpotentiale (2h)

In diesem Kapitel verlassen wir wieder die Materie, und wenden uns der Elektrodynamik im Vakuum zu. Dies ist natürlich keine Einschränkung, da wir die Polarisierungen und Magnetisierung des Materials wieder als Teil der Gesamtladungsdichte und Gesamtstromdichten betrachten können.

In diesem Kapitel werden die elektrischen und magnetischen Felder auf das elektrische Potential und das Vektorpotential, die Eichpotentiale, abgebildet. Im Gegensatz zur Elektrostatik und der Magnetostatik berücksichtigen wir jedoch hier auch die Zeitabhängigkeit der Maxwellgleichungen. Durch den Übergang zu den Eichpotentialen, wird die innere Struktur der Maxwellgleichungen deutlicher. Die Darstellung der Felder durch Eichpotentiale bildet die Grundlage für die Darstellung eines Wirkungsprinzips, und damit auch die Grundlage für eine quantenmechanische Beschreibung des elektromagnetischen Feldes.

Wir werden erkennen, dass die Relativitätstheorie, also die Invarianz bezüglich der Lorentztransformationen, direkt aus den Maxwellgleichungen folgt. Diese Beobachtung war auch historisch der Anfang der Relativitätstheorie.

### 9.1 Elektrisches Potential und Vektorpotential

Wir wollen die Anzahl der Maxwellgleichungen reduzieren, indem wir einen Ansatz wählen, der die zwei homogenen Maxwellgleichungen,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$ , automatisch erfüllt.

Wir beginnen mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , das sich automatisch durch den Ansatz

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

erfüllen lässt, weil die Divergenz eines Rotationsfeldes verschwindet, d.h.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ . Die Eindeutigkeit, bzw deren Einschränkungen, ergeben sich aus dem Helmholtz Theorem (Appendix D.5).

Wir setzen diesen Ansatz in das Faradaysche Gesetz ein und erhalten

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times [\vec{E} + \partial_t \vec{A}]$$

Nun können wir verwenden, dass die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet, d.h.  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$ . Die Eindeutigkeit, bzw deren Einschränkungen, ergibt sich wiederum aus dem Helmholtz Theorem (Appendix D.5). Deshalb definieren wir das skalare Potential

$$-\vec{\nabla} \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} + \partial_t \vec{A}$$

sodass

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A}$$

Wir sehen, dass das skalare Eichpotential  $\Phi$  im statischen Spezialfall gerade unser elektrostatisches Potential ist.

**Definition 9.1** EICHPOTENTIALE

Die Eichpotentiale  $\Phi$  und  $\vec{A}$  sind durch den folgenden Zusammenhang mit den elektromagnetischen Feldern definiert.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (9.1)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A} \quad (9.2)$$

Damit sind zwei der vier Maxwellgleichungen automatisch erfüllt. Das Problem wurde auf die Bestimmung von nur vier ( $\Phi, A_x, A_y, A_z$ ) anstelle von sechs ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) unabhängigen Feldern reduziert.

## 9.2 Bewegungsgleichungen der Eichpotentiale

Die Bewegungsgleichungen für die Eichpotentiale sind durch die zwei verbleibenden Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{j} \end{aligned}$$

bestimmt, wobei wir die Ladungsdichten und die Stromdichten im Vakuum betrachten, das bedeutet, dass die Dielektrizitätskonstanten und Induktionskonstanten die des Vakuums sind.<sup>1</sup>

Wir beginnen mit dem Gaußschen Gesetz,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ .

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{\text{Gl. 9.2}}{=} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}) = \rho \\ \Rightarrow \quad \underbrace{\left[ \vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi \right]}_{X_1} + \partial_t \underbrace{\left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right]}_{X_2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ein Term  $X_1$  addiert und subtrahiert ( $X_2$ ), um die Ähnlichkeit zu den nun folgenden Bewegungsgleichungen deutlich zu machen.

Nun ersetzen wir die Felder im Ampereschen Gesetz. Im folgenden verwenden wir die Identität Gl. C.10,  $\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = -\nabla^2 \vec{v} + \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ , die für beliebige Vektorfelder  $\vec{v}(\vec{r})$  gültig ist.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right) - \partial_t (\epsilon_0 \vec{E}) = \vec{j} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} &= \mu_0 \vec{j} \\ \stackrel{\text{Gl. 9.1, 9.2}}{\Rightarrow} \quad \vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{\vec{B}} - \frac{1}{c^2} \partial_t \underbrace{(-\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A})}_{\vec{E}} &= \mu_0 \vec{j} \\ \stackrel{\text{Gl. C.10}}{\Rightarrow} \quad \left[ -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right] + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\nabla}\Phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} &= \mu_0 \vec{j} \\ \left[ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} \right] - \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right] &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Zusammengefasst erfüllen die Eichpotentiale die folgenden Bewegungsgleichungen.

<sup>1</sup>In einem räumlich und zeitlich homogenen sowie isotropen System, bei denen die Dielektrizitäts- und Induktionskonstanten keine Frequenzabhängigkeit besitzen, kann man auch die entsprechenden Konstanten des Materials einsetzen.

## BEWEGUNGSGLEICHUNG DER EICHPOTENTIALE

$$\begin{aligned}
\left[ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi \right] + \partial_t \left[ \nabla A + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right] &= -\frac{1}{\epsilon} \rho_{tot} \\
\left[ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} \right] - \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right] &= -\mu \vec{j}_{tot}
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Beachte die Symmetrie dieser Gleichungen. Wir werden später sehen, dass sie Lorentzinvariant sind. Historisch bilden die Maxwellgleichungen den Ausgangspunkt der Relativitätstheorie.

### 9.3 Eindeutigkeit der Eichpotentiale

Der Zusammenhang zwischen Eichpotentialen und den elektrischen und magnetischen Feldern, Gln. 9.1, 9.2,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \Phi + \partial_t \vec{A} &= -\vec{E} \\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{B}
\end{aligned}$$

ist einerseits als Definition der Felder, wenn die Potentiale gegeben sind, und andererseits eine Differentialgleichung für die Eichpotentiale, wenn die Felder gegeben sind.

Dieses inhomogene Differentialgleichungssystem hat ohne Randbedingungen keine eindeutige Lösung. Zu jeder Lösung kann eine Lösung  $\Phi^{hom}, \vec{A}^{hom}$  der homogenen Differentialgleichung addiert werden. Diese lautet:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \Phi^{hom} + \partial_t \vec{A}^{hom} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{A}^{hom} &= 0
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Da nur die Felder über die Lorentzkraft beobachtbar sind, entsprechen unterschiedliche Eichpotentiale, aus denen dieselben Felder resultieren, derselben physikalischen Situation. Die Addition der Lösung der homogenen Differentialgleichung ist also eine Symmetrietransformation des Systems. Diese sogenannte **Eichsymmetrie** werden wir im folgenden näher untersuchen.

Die zweite homogene Differentialgleichung in Gl. 9.4 sagt, dass  $\vec{A}^{hom}$  wirbelfrei ist und daher als Gradient  $\vec{\nabla} \Lambda$  einer skalaren Funktion  $\Lambda(\vec{r}, t)$  dargestellt werden kann. Einsetzen in die erste Gleichung von Gl. 9.4 führt uns auf die allgemeine Lösung für die homogenen Eichpotentiale.

$$\begin{aligned}
\vec{A}^{hom} &= \vec{\nabla} \Lambda \\
\Phi^{hom} &= -\partial_t \Lambda
\end{aligned}$$

wobei  $\Lambda$  eine beliebige skalare Funktion ist.

Die Addition von  $\Phi^{hom}, \vec{A}^{hom}$  entspricht also einer Symmetrietransformation der Maxwellgleichungen.

## EICHTRANSFORMATION

Eine Transformation der Eichpotentiale

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \Phi' &= \Phi - \partial_t\Lambda\end{aligned}\quad (9.5)$$

nennt man **Eichtransformation**. Die skalare Funktion  $\Lambda$ , welche die Eichtransformation festlegt, nennen wir **Eichfunktion**. Zwei Sätze von Eichpotentialen, die sich nur durch eine Eichtransformation unterscheiden, sind physikalisch nicht unterscheidbar, da sie die Maxwellgleichungen und Lorentzkraft unverändert lassen. Die Eichtransformation ist also eine Symmetrietransformation der Elektrodynamik. Später werden wir sehen, dass dies eine Eichtransformation der quantenmechanischen Wellenfunktion erfordert.

Obwohl eine Eichtransformation nicht beobachtbar ist, ist sie bedeutend, da laut Noethertheorem aus jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße folgt. Wir werden später sehen, dass aus der Eichsymmetrie die Ladungserhaltung abgeleitet werden kann.

Zwei Eichungen haben den Eingang in die Literatur gefunden, nämlich die Coulomb-Eichung und die Lorentz-Eichung.

Die speziellen Eichungen sind nach meiner Einschätzung nur in Spezialfällen nützlich um die Bewegungsgleichungen weiter zu vereinfachen. Das Problem liegt darin, dass nicht nur die vereinfachten Bewegungsgleichungen, sondern auch die Eichbedingung gleichzeitig erfüllt werden müssen. Letztere führt auf eine zusätzliche Differentialgleichung, die im Allgemeinen besonders schwierig zu lösen ist.

### 9.3.1 Coulomb-Eichung

**Definition 9.2** COULOMB EICHUNG

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (9.6)$$

In der Coulomb-Eichung kann das elektrische Potential direkt bestimmt werden, da sich die erste der Bewegungsgleichungen, Gl. 9.3, für die Eichpotentiale direkt auf die Poisson-Gleichung reduziert.

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Die Vektorpotentiale müssen immer noch durch ein Differentialgleichungssystem bestimmt werden

$$\begin{aligned}\left[ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} \right] &= -\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\nabla} \Phi \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0\end{aligned}$$

Die Coulomb-Eichung führt zu dem scheinbar paradoxen Resultat, dass eine Änderung der Ladungsdichte an einem Ort im Raum, instantan das elektrische Potential im ganzen Universum verändert. Gemäß der Aussage der Relativitätstheorie, kann sich ein Signal aber maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Auflösung des Paradoxes ist, dass eine Änderung des elektrischen Potentials sich zwar unendlich schnell ausbreitet, aber selbst keine physikalisch beobachtbare Größe ist, und damit kein Signal darstellt. Zum elektrischen Feld, das beobachtbar ist, trägt auch das Vektorpotential bei, und diese Beiträge führen dazu, dass sich eine Änderung des elektrischen Feldes nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Der Anteil des Vektorpotentials zum elektrischen Feld ist also nicht zu vernachlässigen!

Die Coulombeichung eignet sich für die Beschreibung von freien Feldern, also bei Abwesenheit von Ladungs- und Stromdichten. In diesem Fall ist das elektrische Potential exakt Null, (falls die Randbedingungen erfordern, dass es im Unendlichen verschwindet.) Gl. 9.7 ist im homogenen Fall eine einfache Wellengleichung für alle drei Komponenten des Vektorpotentials. Eine Komponente, nämlich die, welche senkrecht auf dem Wellenvektor steht, verschwindet aber aufgrund der Eichbedingung Gl. 9.6. Man sieht also sofort, dass es nur zwei unabhängige Polarisationsrichtungen von Licht gibt.

### 9.3.2 Lorentzeichung

**Definition 9.3** *LORENTZEICHUNG*

$$\vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0 \quad (9.7)$$

In der Lorentzeichung erhalten die Bewegungsgleichungen Gl. 9.3 die symmetrische Form

$$\begin{aligned} \left[ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi \right] &= -\frac{1}{\epsilon} \rho \\ \left[ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} \right] &= -\mu \vec{j} \end{aligned} \quad (9.8)$$

welche bereits die Lorentzsymmetrie deutlich macht. Wichtig ist aber, dass zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen in dieser Darstellung auch noch die Eichbedingung Gl. 9.7 erfüllt sein muss.



## Chapter 10

# Relativistische Formulierung der Elektrodynamik (4h)

### 10.1 Kovariante Vektornotation

In der Relativitätstheorie fassen wir die orts- und zeitartige Komponenten in einen Vierervektor zusammen. Damit die Einheiten einheitlich sind, fügt man an entsprechender Stelle einen Faktor  $c$  ein. Ein Beispiel ist  $(ct, x, y, z)$ .

Die kovariante Vektornotation ist zwar zunächst ein wenig gewöhnungsbedürftig, aber dafür extrem ökonomisch und präzise. Sie spielt nicht nur in der Relativitätstheorie, sondern zum Beispiel auch in der Elastizitätstheorie eine wichtige Rolle.

#### 10.1.1 Schiefwinklige Koordinatensysteme

Bisher waren wir kartesische Koordinatensysteme gewohnt, bei denen die Basisvektoren orthogonal zueinander stehen. In dem Fall konnte man einen Vektor durch Projektion

$$r_i = \vec{e}_i \vec{r} \quad (10.1)$$

auf die Einheitsvektoren in die Komponenten zerlegen. Superponiert man die Basisvektoren mit den Komponenten erhält man wieder den ursprünglichen Vektor

$$\vec{r} = \sum_i \vec{e}_i r_i \quad (10.2)$$

Die Voraussetzung dafür war die Orthogonalität

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

der Basisvektoren

Betrachtet man nun ein allgemeineres, **schiefwinkliges Koordinatensystem**, dann sind die Komponenten  $r_i$  in den beiden obigen Gleichungen Gl. 10.1 und Gl. 10.2 nicht mehr identisch. Um sie zu unterscheiden, führen wir zwei Arten von Komponenten ein, die wir kovariante und kontravariante Vektoren nennen. Wir unterscheiden sie, indem wir die Indizes der kontravarianten Vektoren hochgestellt schreiben und die der kovarianten Vektoren, wie üblich, tiefgestellt.

Wir definieren sie wie folgt.

**Definition 10.1 KO- UND KONTRAVARIANTE VEKTORKOMPONENTEN**

Für ein schiefwinkliges System von Basisvektoren  $\vec{e}_i$  sind die **kovarianten Vektorkomponenten**  $x_\mu$  durch

$$r_\mu = \vec{e}_\mu \vec{r}$$

definiert. Die Indizes der kovarianten Vektorkomponenten sind, wie üblich, tiefgestellt. Die zugehörigen **kontravarianten Vektorkomponenten**  $r^\mu$  sind die Faktoren, die nötig sind, um den Vektor durch die Basisvektoren auszudrücken.

$$\vec{r} = \sum_i \vec{e}_i r^i$$

Die Indizes der kontravarianten Komponenten sind hochgestellt.

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  erhalten wir als Summe der Produkte von ko- und kontravarianten Vektorkomponenten.

$$\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \underbrace{\sum_\mu \vec{e}_\mu b^\mu}_{\vec{b}} = \sum_\mu \underbrace{(\vec{a} \vec{e}_\mu)}_{a_\mu} b^\mu = a_\mu b^\mu$$

**Umwandlung von ko- und kontravarianten Vektorkomponenten und metrischer Tensor**

Jetzt sollten wir noch eine Regel finden, um kovariante Vektorkomponenten in kontravariante umzuwandeln, und umgekehrt. Dazu schreiben wir

$$r_\mu = \vec{e}_\mu \vec{r} = \vec{e}_\mu \sum_\nu \vec{e}_\nu r^\nu = \sum_\nu \underbrace{\vec{e}_\mu \vec{e}_\nu}_{=: g_{\mu,\nu}} r^\nu = \sum_\nu g_{\mu,\nu} r^\nu$$

Wir definieren deshalb den rein kovarianten **metrischen Tensor** als Skalarprodukt der Basisvektoren

$$g_{\mu,\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_\mu \vec{e}_\nu$$

Den rein kontravarianten metrischen Tensor definieren wir als Inverse Matrix des rein kovarianten metrischen Tensors.

$$\sum_\nu g^{\mu,\nu} \vec{e}_\nu \vec{e}_\gamma = \delta_{\mu,\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad (g^{\mu\nu}) = (g_{\alpha\beta})_{\mu,\nu}^{-1}$$

Mit dem rein kontravarianten metrischen Tensor können wir die kontravarianten Vektorkomponenten, wie im folgenden gezeigt, aus den kovarianten bestimmen.

$$r^\nu = \sum_\gamma \underbrace{\sum_\mu g^{\mu\nu} g_{\mu\gamma}}_{\delta_{\mu,\gamma}} r^\gamma = \sum_\mu g^{\mu\nu} \underbrace{\sum_\gamma g_{\mu\gamma} r^\gamma}_{r_\mu} = \sum_\mu g^{\mu\nu} r_\mu$$

Durch das Produkt mit dem rein kovarianten metrischen Tensor können wir also einen hochgestellten Index "herunterziehen", also die kontravarianten Vektorkomponenten in kovariante umwandeln. Umgekehrt können wir durch das Produkt mit dem kontravarianten metrischen Tensor einen tiefgestellten Index "hochziehen", also die kovarianten Vektorkomponenten in kontravariante umwandeln.

Schließlich können wir wir noch gemischt ko- und kontravariante metrische Tensoren definieren, indem wir diese Regel auf den metrischen Tensor verallgemeinern.

$$g^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\gamma g^{\mu\gamma} g_{\gamma,\nu} = \delta_{\mu,\nu}$$

$$g_\mu{}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\gamma g_{\mu\gamma} g^{\gamma,\nu} = \delta_{\mu,\nu}$$



Wir fassen die Formen des metrischen Tensors zusammen:

#### METRISCHER TENSOR

Der rein kovariante **metrische Tensor** ist durch die Skalarprodukte der Basisvektoren definiert.

$$g_{\mu,\nu} = \vec{e}_\mu \vec{e}_\nu$$

Der kontravariante metrische Tensor ist die Inverse Matrix zum rein kovarianten metrischen Tensor. Die gemischt ko- und kontravarianten Tensoren sind gerade die Einheitsmatrix.

$$g^{\mu,\nu} = (\vec{e}_\mu \vec{e}_\nu)^{-1}_{\mu,\nu}$$

$$g^\mu{}_\nu = g_\mu{}^\nu = \delta_{\mu,\nu}$$

Der metrische Tensor definiert das Skalarprodukt als

$$\vec{a} \vec{b} = \sum_{\mu,\nu} a^\mu g_{\mu,\nu} b^\nu = \sum_{\mu} a_\mu b^\mu = \sum_{\mu} a^\mu b_\mu$$

#### Von der Vektor-Matrixnotation zur kovarianten Schreibweise

Um eine Gleichung aus einer Vektor-Matrixnotation in die kovariante Schreibweise zu übersetzen, ersetzen wir jeden Vektor durch seine kontravarianten Indizes. Für jedes Skalarprodukt fügen wir den rein kovarianten metrischen Tensor ein und summieren über die beiden Indizes des metrischen Tensors.

Die Idee dahinter ist, dass

$$\mathbf{1} = \sum_{i,j} g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (10.3)$$

Man kann sich davon überzeugen, indem man diese Identität auf einen beliebigen Vektor  $\vec{r} = \sum_{\mu} \vec{e}_\mu r^\mu$  anwendet

$$\underbrace{\sum_{i,j} g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}_{\stackrel{?}{=} \mathbf{1}} \underbrace{\left( \sum_{\mu} \vec{e}_\mu r^\mu \right)}_{\vec{r}} = \sum_i \vec{e}_i \sum_{\mu} \underbrace{\left( \sum_j g^{ij} g_{j,\mu} \right)}_{\delta_{i,\mu}} r^\mu = \sum_i \vec{e}_i r^i = \vec{r}$$

Eine Gleichung wird also in seine Komponenten zerlegt, indem man diese Form der Identität Gl. 10.3 in jedes Skalarprodukt einfügt.

**Beispiel** für die Umformung eines Ausdrucks in Matrix-Vektornotation in die ko- und kontravari-

ante Schreibweise

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \mathbf{B} \vec{c} &= \vec{a} \mathbf{1} \mathbf{B} \mathbf{1} \vec{c} = \vec{a} \left( \underbrace{\sum_{i,j} g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}_1 \right) \mathbf{B} \left( \underbrace{\sum_{k,\ell} g^{k,\ell} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_\ell}_1 \right) \vec{c} \\
 &= \sum_{i,j,k,\ell} \underbrace{(\vec{a} \vec{e}_i)}_{a_i} g^{ij} \underbrace{(\vec{e}_j \mathbf{B} \vec{e}_k)}_{B_{j,k}} g^{k,\ell} \underbrace{(\vec{e}_\ell \vec{c})}_{c_\ell} \\
 &= \sum_{j,k} \left( \underbrace{\sum_i a_i g^{ij}}_{a^j} \right) B_{j,k} \underbrace{\sum_\ell g^{k,\ell} c_\ell}_{c^k} \\
 &= \sum a^j B_{j,k} c^k
 \end{aligned}$$

### Ableitungen

Während wir die kontravarianten Vektoren mit der üblichen Schreibweise identifizieren, ist dies bei Ableitungen anders: Die Ableitung nach einem kontravarianten Vektor, also dem Vektor in der üblichen Form, ist ein kovarianter Vektor. Betrachten wir eine Funktion  $\Phi(\vec{r})$ .

$$\frac{d\Phi}{dx^i} = \vec{e}_i \vec{\nabla} \Phi = \partial_i \Phi$$

sehen wir, dass die üblichen Ableitungen mit den kovarianten Komponenten des Gradientenvektors gleichgesetzt werden.

Wir wollen dies jetzt etwas ausführlicher ableiten: Betrachten wir die Ableitungen eines kovarianten Vektors nach sich selber, erhalten wir

$$\frac{dx^i}{dx^j} = g^i_j \quad (10.4)$$

Dies ist nicht weiter als eine Verallgemeinerung des Ausdrucks

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \delta_{ij}$$

aus der regulären Vektorschreibweise, weil der gemischt ko- und kovariante metrische Tensor gerade die Einheitsmatrix ist<sup>1</sup>.

Nun verallgemeinern wir die Ableitungen Gl. 10.4 auf kovariante Vektoren.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_i}{dx^j} &= \frac{d(\sum_k g_{ik} x^k)}{dx^j} = \sum_k g_{ik} \frac{dx^k}{dx^j} \stackrel{\text{Gl. 10.4}}{=} \sum_k g_{ik} g^k_j = g_{ij} \\
 \sum_k \frac{dx^i}{dx_k} \frac{dx_k}{dx^j} &= \frac{dx^i}{dx^j} = g^i_j \\
 \Rightarrow \sum_k \frac{dx^i}{dx_k} g_{k,j} &\stackrel{\text{Gl. 10.4}}{=} g^i_j \\
 \Rightarrow \sum_{k,j} \frac{dx^i}{dx_k} g_{k,j} g^{j,\ell} &= \sum_k \frac{dx^i}{dx_k} \underbrace{\sum_j g_{k,j} g^{j,\ell}}_{g_k^\ell = \delta_{k,\ell}''} \underbrace{g^{i,\ell}}_{g^{i,\ell}} \\
 \Rightarrow \frac{dx^i}{dx_\ell} &= g^{i,\ell}
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Beachte  $(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$

Schließlich untersuchen wir die zweite ko- und kontravariante Ableitung

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \sum_k \frac{dx_i}{dx^k} \frac{dx^k}{dx_j} = \sum_k g_{i,k} g^{k,j} = g_i^j$$

#### ABLEITUNGEN IN KO- UND KONTRAVARIANTER SCHREIBWEISE

Ableitungen können über die Kettenregel immer auf Ableitungen einer Variable nach sich selbst übergeführt werden.

Diese haben die Form des metrischen Tensors

$$\frac{dx^i}{dx^j} = g^i_j \quad \frac{dx^i}{dx_j} = g^{i,j} \quad \frac{dx_i}{dx^j} = g_{i,j} \quad \frac{dx_i}{dx_j} = g_i^j \quad (10.5)$$

Es ist darauf zu achten, dass die Ableitung nach einem kontravarianten Vektor ein kovarianter Vektor ist und umgekehrt.

Beispiel: Betrachten wir die Ableitung einer Funktion eines kontravarianten Vektors nach einer kontravarianten Variable

$$\frac{df(x^1, x^2, x^3)}{dx_j} = \sum_k \frac{df(x^1, x^2, x^3)}{dx^k} \frac{dx^k}{dx_j} = \sum_k (\partial_k f(x^1, x^2, x^3) g^{kj} = \partial^j f(x^1, x^2, x^3)$$

Beachte, dass die Funktion  $f(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{x^1}$  in einem schiefwinkligen Koordinatensystem nicht mit der Funktion  $g(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1}$  identisch ist. Die Funktion  $g$  in kovarianten Indizes ausgedrückt ist  $g(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{\sum_k g_{1,k} x^k}$ .

Im Allgemeinen fassen wir die Argumente in der folgenden Form zusammen  $f(x^1, x^2, x^3) = f(x^i)$

### 10.1.2 Einsteinsche Summenkonvention

Um sich das Schreiben der Summenzeichen zu ersparen werden wir im Folgenden die **Einsteinsche Summenkonvention** verwenden. Dies erfordert, dass jeder Index maximal zweimal in einer Gleichung auftaucht. Sobald er zweimal auftaucht, muss einer davon kovariant und der andere kontravariant sein. In diesem Fall wird automatisch über diesen Index summiert. Diese Regel führt zu folgender Ersetzung

$$\sum_{\mu} a_{\mu} b^{\mu} \rightarrow a_{\mu} b^{\mu}$$

Da die Regel, nur gleiche Indizes zu verwenden, zu einem Engpass der Indizes führen kann, weichen wir manchmal von der Regel ab, aber nur dann, wenn die beiden Paare eindeutig dadurch unterschieden werden können, dass zwischen ihnen kein Skalarprodukt gebildet werden kann.

### 10.1.3 Rechenregeln für die kovariante Schreibweise

Im folgenden möchte ich einige Regeln zum Umgang mit der kovarianten Vektornotation besprechen

- Ko- und kontravariante Vektorkomponenten werden durch Einfügen eines metrischen Tensors ineinander umgewandelt.

$$a_{\mu} = g_{\mu,\nu} a^{\nu} \quad , \quad a^{\mu} = g^{\mu,\nu} a_{\nu}$$

- Vertauschungsregel

$$x_{\mu} y^{\mu} = x^{\mu} y_{\mu}$$

- Während das Skalarprodukt  $x_\mu x^\mu$  ein Skalar ist, beschreibt das dyadische Produkt  $x_\mu x^\nu$  einen Tensor. Ein Tensor entspricht einer Matrix. Er transformiert sich unter einer Symmetrietransformation wie das dyadische Produkt.
- Die Ableitung nach einem kovarianten Vektor ist ein kontravarianter Vektor und umgekehrt

$$\partial_\mu f(x^\alpha) = \frac{df}{dx^\mu}, \quad \partial^\mu f(x^\alpha) = \frac{df}{dx_\mu} = g^{\mu,\nu} \partial_\nu f(x^\alpha)$$

- die gemischt ko- und kontravarianten Vektoren sind mit der Einheitsmatrix identisch. Die rein ko und kontravarianten Vektoren sind invers zueinander, d.h.

$$g_{\mu,\gamma} g^{\gamma,\nu} = g_\mu{}^\nu = \delta_{\mu,\nu}''$$

- Bei Matrizen mit gemischten ko- und kovarianten Indizes ist es wichtig die Reihenfolge der Indizes zu beachten. Zum Beispiel ist im allgemeinen  $F_\mu{}^\nu \neq F^\nu{}_\mu$ . Ein Ausdruck der Art  $F_\nu^\mu$  wäre in dem Fall bedeutungslos.

### 10.1.4 Zusammenhang mit anderen Vektornotationen

Ein kontravarianter Vektor kann mit einem stehenden Vektor und ein kovarianter mit einem liegenden identifiziert werden

$$x^\mu \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x_\mu \hat{=} (x, y, z)$$

In der bisherige Vektornotation wird nur durch die Verknüpfungssymbole für das Skalarprodukt oder das dyadische Produkt festgelegt, ob ein liegender oder stehender Vektor vorliegt. In der kovarianten Vektornotation wird dieser Unterschied explizit.

In kartesischen Koordinaten können wir die Analogie zu anderen gebräuchlichen Vektornotationen aufzeigen. Ein kontravarianter, oder stehender Vektor entspricht einer  $(n \times 1)$  Matrix, während ein kovarianter, oder liegender einer  $(1 \times n)$  Matrix entspricht. Ein stehender Vektor geht durch Transposition in einen liegenden Tensor über. Man kann daher den Unterschied auch durch das Transpositionszeichen deutlich machen, sodass  $\vec{a}^T$  einen liegender Vektor bezeichnet. (Diese Notation ist nicht gebräuchlich.) Eine weitere Schreibweise, die den Unterschied deutlich macht, ist die Dirac'sche Bracketschreibweise, welche in der Quantenmechanik üblich ist. Dort wird ein liegender Vektor mit  $\langle a|$  bezeichnet während ein stehender vektor als  $|b\rangle$  dargestellt wird. Das Skalarprodukt ist entsprechend  $\langle a|b\rangle$ , während das dyadische Produkt als  $|b\rangle\langle a|$  geschrieben wird.

|                        |               |                     |                       |                          |                           |
|------------------------|---------------|---------------------|-----------------------|--------------------------|---------------------------|
| Kontravarianter Vektor | $a^\mu$       | $\vec{a}$           | $ a\rangle$           | $a_{i,1}$                | $\vec{a}$                 |
| Kovarianter Vektor     | $b_\mu$       | $\vec{b}^T$         | $\langle b $          | $b_{1,i}$                | $\vec{b}$                 |
| Skalarprodukt          | $b_\mu a^\mu$ | $\vec{b}^T \vec{a}$ | $\langle b a\rangle$  | $\sum_i b_{1,i} a_{i,1}$ | $\vec{a} \cdot \vec{b}$   |
| Dyadisches Produkt     | $a^\mu b_\nu$ | $\vec{a} \vec{b}^T$ | $ a\rangle\langle b $ | $a_{i,1} b_{1,j}$        | $\vec{a} \otimes \vec{b}$ |

Die unterschiedlichen Schreibweisen werden für unterschiedliche Probleme eingesetzt und helfen dadurch, den entsprechenden Kontext hervorzuheben. Die kovariante Vektornotation hat sich in der Relativitätstheorie und der Elastizitätstheorie eingebürgert. Beide behandeln gekrümmte Räume. Die Bracketschreibweise wird in der Quantenmechanik genutzt.

## 10.2 Symmetrie der Bewegungsgleichungen für die Eichpotentiale

Wir haben gesehen, dass die Bewegungsgleichungen Gl. 9.3 für die Eichpotentiale eine gewisse Symmetrie aufweisen. Dies wird deutlich wenn wir die erste Gleichung durch  $c$  dividieren und die Faktoren

$c$  umsortieren

$$\begin{aligned} \left[ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi \right] + \partial_t \left[ \nabla A + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right] &= -\frac{1}{\epsilon} \rho \\ \left[ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} \right] - \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right] &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (10.6)$$

Wir dividieren die erste Gleichung durch  $c$  und gruppieren die Terme

$$\begin{aligned} \left[ \nabla^2 \frac{\Phi}{c} - \left( \frac{1}{c} \partial_t \right)^2 \frac{\Phi}{c} \right] + \left( \frac{1}{c} \partial_t \right) \left[ \nabla A + \left( \frac{1}{c} \partial_t \right) \frac{\Phi}{c} \right] &= -\frac{1}{\epsilon} \underbrace{(\mu_0 \epsilon_0)}_{\frac{1}{c^2}} c \rho = -\mu_0 c \rho \\ \left[ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \left( \frac{1}{c} \partial_t \right)^2 \vec{A} \right] - \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \vec{A} + \left( \frac{1}{c} \partial_t \right) \frac{\Phi}{c} \right] &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (10.7)$$

Nun führen wir die Vierervektoren ein

**Definition 10.2** EREIGNISVEKTOR UND VIERERGRADIENT

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

Der Gradient bezüglich der Komponenten des kontravarianten Ereignisvektors ist kovariant. Der kovariante **Vierergredient** hat also die Form

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

**Definition 10.3** VIERERVEKTOR DER EICHPOTENTIALE

$$A^\mu(x^\nu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \Phi(\vec{r}, t) \\ \vec{A}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

Dabei ist  $\Phi$  das elektrische skalare Potential und  $\vec{A}$  das Vektorpotential.

**Definition 10.4** VIERERSTROMDICHTEN

$$j^\mu(x^\nu) = \begin{pmatrix} c\rho(\vec{r}, t) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

Dabei ist  $\rho$  die Ladungsdichte und  $\vec{j}$  die Stromdichte.

Nun setzen wir die Vierervektoren in die obige Gleichung ein.

$$\begin{aligned} \left( -\partial_0^2 + \sum_{k=1}^3 \partial_k^2 \right) A^0 + \partial_0 \left( \partial_0 A^0 + \sum_{k=1}^3 \partial_k A^k \right) &= -\mu_0 j^0 \\ \left( -\partial_0^2 + \sum_{k=1}^3 \partial_k^2 \right) A^i - \partial_i \left( \partial_0 A^0 + \sum_{k=1}^3 \partial_k A^k \right) &= -\mu_0 j^i \end{aligned}$$

Störend sind noch die entgegengesetzten Vorzeichen bei den Raum und Zeitableitungem. Diese absorbieren wir in einem metrischen Tensor

**Definition 10.5** METRISCHER TENSOR DER SPEZIELLEN RELATIVITÄTSTHEORIE UND MINKOWSKI RAUM

$$g_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

Einen Vektorraum mit dem metrischen Tensor aus Gl. 10.12 nennt man **Minkowski Raum**.

Dieser metrische Tensor kann nicht mehr als metrischer Tensor eines schiefwinkligen Koordinatensystems angesehen werden, da das Skalarprodukt von zwei "normalen" Vektoren nicht negativ sein kann. Im vorliegenden Fall müsste man einen komplexen Basisvektor für die Raumkoordinaten ansetzen.

Mit dieser Definition des metrischen Tensors erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( -\partial_0 \partial^0 - \sum_{k=1}^3 \partial_k \partial^k \right) A^0 \underbrace{+\partial^0}_{+\partial_0} \left( \partial_0 A^0 + \sum_{k=1}^3 \partial_k A^k \right) &= -\mu_0 j^0 \\ \left( -\partial_0 \partial^0 - \sum_{k=1}^3 \partial_k \partial^k \right) A^i \underbrace{+\partial^i}_{-\partial_i} \left( \partial_0 A^0 + \sum_{k=1}^3 \partial_k A^k \right) &= -\mu_0 j^i \end{aligned}$$

Nach einem Vorzeichenwechsel führt dies auf

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (10.13)$$

#### BEWEGUNGSGLEICHUNG DER EICHPOTENTIALE IN KOVARIANTER FORM

Die Bewegungsgleichungen Gl. 9.3 der Eichpotentiale haben in kovarianter Viererschreibweise die Form

$$\partial_\mu \underbrace{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}_{F^{\mu,\nu}} = \mu_0 j^\mu \quad (10.14)$$

Der Tensor  $F^{\mu,\nu}$  ist der Feldstärketensor, den wir später noch genauer kennenlernen möchten.

Interessant ist die mathematische Analogie zwischen  $\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$  und der Bewegungsgleichung für die Eichpotentiale  $\partial_\mu F^{\mu,\nu} = \mu_0 j^\nu$ . Beide verknüpfen eine Divergenz mit einem Quellterm.

Hier haben wir bereits einige Vierervektoren eingeführt. Im Folgenden werden die gängigsten Vektoren in die kovarianten Viererschreibweise zusammengestellt:

|                       |  |
|-----------------------|--|
| Ereignisvektor        | $x^\mu = (ct, \vec{r})$  |
| Ableitung             | $\partial^\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla})$  |
| Vierergeschwindigkeit | $v^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(c, \vec{v})$   |
| Viererimpuls          | $p^\mu = (E/c, \vec{p})$   |
| Wellenvektor          | $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$  |
| Eichpotential         | $A^\mu = (\Phi/c, \vec{A})$  |
| Stromdichte           | $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$   |
| Feldstärketensor      | $F^{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$ |

### 10.3 Lorentz-Transformationen

Die Maxwellgleichungen gelten auch wenn wir das Bezugssystem drehen, in Raum und Zeit verschieben oder von einem bewegten Bezugssystem betrachten. Dies ist eine experimentelle Beobachtung.

Für uns bedeutet dies, dass sich die Vektoren in den Bewegungsgleichungen so transformieren müssen, dass das Skalarprodukt erhalten bleibt.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$x'_\mu y'^\mu = x'^\mu g_{\mu\nu} y'^\nu = (\Lambda^\mu_\alpha x^\alpha) g_{\mu\nu} (\Lambda^\nu_\beta x^\beta) \stackrel{!}{=} x_\alpha y^\alpha = x^\alpha g_{\alpha\beta} y^\beta$$

Soll diese Gleichung für alle Vektoren gelten, dann folgt daraus eine Bedingung für die Lorentz Transformationen.

#### Definition 10.6 LORENTZ-TRANSFORMATIONEN

Die **Lorentz-Transformationen** sind alle affinen Abbildungen, welche das Skalarprodukt mit dem metrischen Tensor Gl. 10.12 der speziellen Relativitätstheorie erhalten. Der lineare Anteil einer Lorentztransformation entspricht einem Vierertensor  $\Lambda^\mu_\nu$ , welcher die Gleichung

$$\Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (10.15)$$

mit dem oben genannten metrischen Tensor Gl. 10.12 erfüllt.

Im Band *PhiSX:Klassische Mechanik* wurde, sowohl anhand der Drehung, als auch anhand der Lorentztransformation, gezeigt, dass man alleine aus Bedingung, dass das Skalarprodukt erhalten ist, die erlaubten Transformationen erhalten kann.

Die Lorentztransformationen entsprechen

- den Raumdrehungen
- Rauminversion (Spiegelungen im Raum)
- Zeitinversion (Spiegelungen der Zeit)
- Transformation in ein bewegtes Inertialsystem<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem in dem ein kräftefreier Körper keine Beschleunigung erfährt. Bewegt sich ein Bezugssystem mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu einem Inertialsystem, dann ist das Bezugssystem selbst ein Inertialsystem.

### Nichtrelativistischer Grenzfall

Die Transformation in ein bewegtes Bezugssystem unterscheidet sich von der bekannten Galileitransformation, weshalb wir sie uns hier genauer ansehen. Eine detailliertere Beschreibung findet man in *PhiSX: Klassische Mechanik*.

Betrachten wir eine Transformation in ein Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit  $V$  in  $x$ -Richtung bewegt, dann erhalten wir nicht mehr die bekannte Galileitransformation. Die Transformation hat stattdessen die Form

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V/c^2 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

$$\stackrel{V \ll c}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x - Vt \end{pmatrix} \quad (10.17)$$

die erst für  $V \ll c$  in die bekannte Galileitransformation übergeht, die auf der rechten Seite angegeben ist.

Wir haben die Form der Transformation einfach angenommen, ohne dies weiter zu begründen. Eine Herleitung findet man in *PhiSX: Klassische Mechanik*. Hier wollen wir nur überprüfen ob dies tatsächlich eine Lorentztransformation ist.

Zunächst betimmen wir  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V/c \\ -V/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \Lambda &\triangleq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c} \\ -\frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun setzen wir  $\Lambda$  in Gl. 10.15 ein:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V/c \\ -V/c & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_g \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V/c \\ -V/c & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} &\stackrel{\Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta \stackrel{\text{Gl. 10.15}}{=} g_{\alpha\beta}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_g \\ \frac{1}{1 - (\frac{V}{c})^2} \begin{pmatrix} 1 & -V/c \\ -V/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -V/c \\ -V/c & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{1 - (\frac{V}{c})^2} \begin{pmatrix} 1 & -V/c \\ -V/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -V/c \\ V/c & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{1 - (\frac{V}{c})^2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{V^2}{c^2} & 0 \\ 0 & -1 + \frac{V^2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -V/c \\ V/c & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*q.e.d.*

### Invarianz der Lichtgeschwindigkeit

Insbesondere haben die Lorentztransformationen die Eigenschaft, die Lichtgeschwindigkeit zu erhalten. Betrachten wir dazu ein Teilchen in einem bewegten Bezugssystem, das sich mit Licht-



geschwindigkeit bewegt.

$$\begin{aligned}
 x'(t') &= ct' \\
 \Rightarrow 0 &= x' - ct' \stackrel{\text{Gl. 10.16}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} \left[ (x - Vt) - c \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} [(1 + V/c)x - c(1 + V/c)t] = \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} [x - ct] \\
 \Rightarrow 0 &= x - ct \\
 \Rightarrow x(t) &= ct
 \end{aligned}$$

Entsprechend der Galileitransformation würde man erwarten, dass die Geschwindigkeit des Teilchens, vom ruhenden Betrachter aus gesehen, die Geschwindigkeit  $c + V$  hat, was der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit widersprechen würde.

Aus den Lorentztransformationen resultieren die bekannten relativistischen Effekte wie Zeitdilatation, Längenkontraktion und die Relativität der Gleichzeitigkeit, die in "ΦSX:Klassische Mechanik" beschrieben wurden.

## 10.4 Aufgaben

Betrachte ein kartesisches, dreidimensionales Koordinatensystem. Wandle die Folgenden Ausdrücke in die kovariante Schreibweise um.

$$\begin{aligned}
 \vec{a}\vec{b} \\
 \mathbf{A}\vec{b} \\
 \vec{a}\mathbf{A} \\
 \vec{a}\vec{A}\vec{b} \\
 \vec{a} \otimes \vec{b}
 \end{aligned}$$



# Chapter 11

## Wirkungsprinzip (4h)

Bisher haben wir die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft als Postulate für die Elektrodynamik angesehen. Beide lassen sich aber aus dem Wirkungsprinzip mit einer speziellen Form der Wirkung ableiten. Das **Wirkungsprinzip** sagt, dass es ein Wirkungsfunktional der Teilchenpfade und der Felder gibt, das für die tatsächlich realisierten Pfade und Felder extremal wird.

Wir haben bisher gesehen, dass die Maxwellgleichungen Lorentzinvariant sind. Daraus resultiert die Annahme, dass vielleicht nicht nur die Elektrodynamik sondern alle physikalischen Gleichungen Lorentzinvariant sind. Dies ist eine notwendige Bedingung dafür, dass die Bewegungsgleichungen in allen Inertialsystemen identisch sind, und, dass es keine absolute Geschwindigkeit gibt. Nur das Experiment kann entscheiden ob diese Annahme richtig ist. Experimentell ist diese Annahme bisher ohne Ausnahme bestätigt.

Aus der Lorentz-Invarianz der physikalischen Gleichungen folgt sofort, dass die Wirkung selber Lorentz invariant ist.<sup>1</sup>

Eine Lorentz-invariante Form der Wirkung kann man herstellen, indem man sie aus Lorentz-Skalaren aufbaut. Dies erreicht man, indem man sie als Funktion von Lorentz-Skalaren ausdrückt. Ein **Lorentz-Skalar** ist eine Größe, die ihren Wert bei einer Lorentz transformation nicht ändert.

Ein Beispiel für einen Lorentz-Skalar ist die Eigenzeit.

### Definition 11.1 EIGENZEIT

Die **Eigenzeit**  $\tau$  zwischen zwei Ereignissen ist die Zeit die ein Beobachter misst, der sich entlang eines Pfades bewegt, der die beiden Ereignisse verbindet. Die Eigenzeit ist also eine Eigenschaft der Bahn selbst. Für einen ruhenden Beobachter gehen die Uhren des auf der Bahn bewegten Beobachters aufgrund der Zeitdilatation langsamer

$$\tau(t) = \tau(0) + \int_0^t dt' \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad d\tau = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt \quad (11.1)$$

Die Eigenzeit ist einem Pfad  $y^\mu(t)$  zugeordnet. Dieselben zwei Ereignisse können also, je nach zugeordneter Bahn, unterschiedliche Eigenzeitabstände besitzen.

Betrachten wir zum Beispiel die Zeit, welche ein Astronaut für sein Frühstück benötigt, können unterschiedliche Beobachter durchaus zu unterschiedlichen Resultaten kommen. Einigkeit besteht jedoch darüber, welche Zeit der Astronaut selber für sein Frühstückspause misst. Dies ist gerade die Eigenzeit, über die sich alle Beobachter einig sind.

Weitere Lorentz-Skalare kann man als Skalarprodukt von zwei **Lorentz-Vektoren** bilden. Ein

<sup>1</sup>Das ist nicht ganz richtig. Es gibt Transformationen der Wirkung, welche die aus dem Wirkungsprinzip resultierenden Bewegungsgleichungen unverändert lassen. Eine Lorentz transformation darf also die Wirkung ändern, aber nicht so, dass sich dadurch die bewegungsgleichungen ändern. Siehe ΦSX:Klassische Mechanik im Kapitel über die Eindeutigkeit der Lagrange Funktion.

solcher Lorentz-Vektor ist der Vierervektor  $x^\nu$  eines Ereignisses mit  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  und  $x^3 = z$  und die Vierergeschwindigkeit.

**Definition 11.2** *VIERERGESCHWINDIGKEIT*

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-1} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

Beachte, dass das Skalarprodukt der Vierergeschwindigkeit mit sich selbst gerade  $c^2$  ist. Ein im Raum ruhender Körper bewegt sich also "mit Lichtgeschwindigkeit in die Zukunft".

Die Wirkung eines geladenen Teilchens, das sich auf einem Pfad  $y^\mu(\tau)$  bewegt, und dem elektromagnetischen Feld, das durch die Eichpotentiale  $A^\mu(x^\nu)$  beschrieben wird, ist durch den folgenden Ausdruck gegeben.<sup>2</sup>

WIRKUNG DER ELEKTRODYNAMIK

$$S[A^\mu(x^\mu), y^\mu(\tau)] = -m_0 c^2 \int d\tau - q \int dy_\mu A^\mu(y^\nu) - \frac{1}{4\mu_0 c} \int d^4x \left( \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \left( \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) \quad (11.3)$$

Der erste Term ist die Wirkung freier Teilchen, der letzte beschreibt freie elektromagnetische Felder und der mittlere ist ein Kopplungsterm.

- Das vierdimensionale Raum-Zeit-Integral steht für  $d^4x = c \, dt d^3r$ .
- Die Integrale für die Wirkung des freien Teilchens und des Kopplungsterms sind Bahnintegrale über die Bahn  $y^\nu(\tau)$ .
- das Bahnintegral des Kopplungsterms löst man, indem man eine parameterisierte Form des Pfades wie zum Beispiel  $y^\mu(\tau)$  einsetzt.

$$\int dy^\mu A_\mu(y^\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(y^\nu(\tau))$$

Diese Wirkung ist eine der einfachsten Lorentz-invarianten Formen der Wirkung die man für ein Vektorfeld und einen daran gekoppelten Pfad bilden kann.

Beachte, dass die Wirkung nicht invariant bezüglich einer Eichtransformation Gl. 9.5, ist. Es wird sich zeigen, dass dieser Mangel keinen Einfluss auf die von der Wirkung abgeleiteten Bewegungsgleichungen hat. Er wird sich aber bei der Bestimmung der Erhaltungsgrößen aus dem Noethertheorem, wenn auch nicht irreperabel, äußern. Das Problem wird durch die Quantenmechanik behoben, wenn auch die Teilchen durch Felder beschrieben werden.

Die Wirkung aus Gl. 11.3 ersetzt von nun an die Postulate der Maxwellgleichungen und der Lorentzkraft. Wir werden sehen, dass die Maxwell-Gleichungen und die Lorentz-Kraft eine direkte Folge dieser Wirkung sind. Später, in Kapitel 13, werden wir selbst diese Wirkung aus noch allgemeineren Prinzipien herleiten.

<sup>2</sup>Die Wirkung kann leicht von einem Pfad auf mehrere verallgemeinert werden, indem man mehrere Pfadanteile hinzufügt.

## 11.1 Lagrange-Funktion und Lagrange-Dichte

Um die im Folgenden abgeleiteten Resultate auf allgemeinere Probleme als die der Elektrodynamik übertragen zu können, bringen wir Wirkung der Elektrodynamik, Gl. 11.3, in eine allgemeinere Form:

$$S[y^\mu(t), \Phi_i(x^\alpha)] = \underbrace{\int dt \mathcal{L}(y^\alpha(t), \dot{y}^\alpha(t), \Phi_i(y^\alpha(t)))}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{c} \int d^4x \ell(\Phi_i(x^\beta), \partial_\alpha \Phi_i(x^\beta), x^\beta)}_{S_2} \quad (11.4)$$

Den Beitrag  $S_1$  bezeichnen wir im Folgenden als den **Pfadanteil der Wirkung** und den Beitrag  $S_2$  als den **Feldanteil**.<sup>3</sup> Die Funktion  $\mathcal{L}$  ist die Lagrange-Funktion des Pfadanteils der Wirkung und  $\ell$  ist die Lagrange-Dichte des Feldanteils.

In der Elektrodynamik sind die Felder  $\Phi_i$  gerade die Eichpotentiale  $A^\mu$ . Die Funktionen  $\mathcal{L}$  und  $\ell$  für die Elektrodynamik werden noch bestimmt.

Während wir die Koordinaten in kovarianter Schreibweise bezeichnen, soll der Feldindex  $i$  in Gl. 11.4 ein konventioneller Index sein. Diese Wahl vereinfacht die Unterscheidung der Summen über Koordinatenkomponenten und Feldkomponenten. Später können wir die erhaltenen Resultate leicht auf andere Probleme übertragen, bei denen möglicherweise skalare Felder oder sogar Tensorfelder auftreten.

Die Wirkung wird im Allgemeinen als Zeitintegral der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}_{tot}$ , d.h. als

$$S = \int dt \mathcal{L}_{tot}$$

geschrieben. Wir schreiben  $\mathcal{L}_{tot}$ , um die Lagrange Funktion der gesamten Wirkung von der des Pfadanteils in Gl. 11.4 zu unterscheiden. Die Lagrange-Funktion ist sozusagen die Zeitableitung der Wirkung nach der Endzeit des betrachteten Zeitintervalls. Da die Zeit kein Lorentz-Skalar ist, hat dies zur Folge, dass die Lagrange Funktion der Elektrodynamik im Gegensatz zur seiner Wirkung kein Lorentz-Skalar ist. Der Grund für diese Wahl ist, dass bei der Variation der Wirkung die Positionen und Zeiten am Anfang und Ende des Pfades, bzw. die Felder am Rand eines Raum-Zeitbereichs festgehalten werden. Die Eigenzeit eines Pfades kann jedoch bei der Variation durchaus variieren.

Um die Lagrange Funktion für die Wirkung aus Gl. 11.4 zu bestimmen, schreiben wir

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt d^3r$$

und erhalten

$$S = \int dt \mathcal{L} + \frac{1}{c} \int d^4x \ell = \int dt \underbrace{\left( \mathcal{L} + \int d^3r \ell \right)}_{\mathcal{L}_{tot}}$$

und damit<sup>4</sup>

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L} + \int d^3r \ell$$

<sup>3</sup>Die Begriffe Pfadanteil und Feldanteil sind keine stehenden Ausdrücke und werden nur hier verwendet.

<sup>4</sup>

$$\mathcal{L}_{tot}(\vec{y}, \dot{\vec{y}}, [\Phi_i(\vec{r})], [\dot{\Phi}_i(\vec{r})], t) = \mathcal{L}(y^\alpha, \dot{y}^\alpha, \Phi_i(\vec{y})) + \int d^3r \ell(\Phi_i(\vec{r}), \partial_\alpha \Phi_i(\vec{r}), x^\alpha)$$

Die Lagrange Funktion ist also eine Funktion der Position und der Geschwindigkeit eines Teilchens, als auch ein Funktional der Felder und ihrer Zeitableitungen als Funktionen des Raums. Zu beachten ist aber, dass wir die Funktionen  $\mathcal{L}$  und  $\ell$  als einfache Funktionen der Argumente betrachten! Die Zeitabhängigkeit von  $\mathcal{L}$  steckt in der nach  $y^0$  und die von  $\ell$  steckt in der Abhängigkeit nach  $x^0$ .

Alternativ kann man die Wirkung auch mit Hilfe der Lagrange-Dichte  $\ell_{tot}$  als Integral über Raum und Zeit schreiben.

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \ell_{tot}$$

Nun wollen wir die Lagrange-Dichte Gl. 11.4 bestimmen. Dazu verwenden wir die vierdimensionale  $\delta$ -Funktion <sup>5</sup>

$$\delta(x'^\mu - x^\mu) = \delta(ct' - ct)\delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \frac{1}{c}\delta(t' - t)\delta(\vec{r}' - \vec{r})$$

Dadurch können wir die Wirkung aus Gl. 11.4 wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} S &= \int dt \mathcal{L} + \frac{1}{c} \int d^4x \ell \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \underbrace{\left( \ell + c \int dt \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \mathcal{L} \right)}_{\ell_{tot}} \end{aligned}$$

Die Lagrange-Dichte hat also die Form <sup>6</sup>

$$\ell_{tot} = \ell + c \int dt \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \mathcal{L}$$

## 11.2 Lagrange-Funktion und Lagrange-Dichte der Elektrodynamik

Jetzt wollen wir die Wirkung der Elektrodynamik Gl. 11.3 auf die obige Form Gl. 11.4 bringen, um die entsprechende Lagrange-Funktion und die Lagrange-Dichte zu bestimmen. Wir drücken dazu das Eigenzeitdifferential  $d\tau$  durch die Geschwindigkeit<sup>7</sup>  $dy^\mu/dt$  aus.

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}$$

<sup>5</sup>Die Definition der  $\delta$ -Funktion sagt, dass die folgenden Gleichungen für beliebige stetige Funktionen  $f(x^\alpha)$  bzw.  $f(\vec{r}, t)$  erfüllt sein müssen.

$$\begin{aligned} f(x^\alpha) &= \int d^4x' \delta(x'^\mu - x^\mu) f(x'^\alpha) \\ f(\vec{r}, t) &= \int dt' \int d^3r' \delta(t' - t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}) f(\vec{r}', t') = \int d^3r' \delta(\vec{r}' - \vec{r}) f(\vec{r}', t) \end{aligned}$$

<sup>6</sup>

$$\ell_{tot}(\Phi_i, \partial_\alpha \Phi, x^\alpha, y^\alpha, \dot{y}^\alpha) = \ell(\Phi_i, \partial_\alpha \Phi, x^\alpha) + \int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{y}) \mathcal{L}(y^\alpha, \dot{y}^\alpha, \Phi_i)$$

<sup>7</sup>Beachte, dass dies diese Geschwindigkeit nicht mit der Vierergeschwindigkeit von Gl. 11.2 identisch ist.

Nun können wir die Wirkung Gl. 11.3 als Zeitintegral ausdrücken.

$$\begin{aligned}
 S[A^\mu(x^\mu), y^\mu(\tau)] &\stackrel{\text{Gl. 11.3}}{=} \int \underbrace{dt \frac{d\tau}{dt}}_{d\tau} (-m_0 c^2) + \int \underbrace{dt \frac{dy^\mu}{dt}}_{dy^\mu} (-q A_\mu(y^\nu)) \\
 &\quad + \underbrace{\int dt \int d^3r \frac{-1}{4\mu_0}}_{\frac{1}{c} \int d^4x} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
 &\stackrel{\text{Gl. 11.1}}{=} \int dt \underbrace{\left( -m_0 c \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}} - q A_\mu(y^\nu) \frac{dy^\mu}{dt} \right)}_{\mathcal{L}} \\
 &\quad + \int dt \int d^3r \underbrace{\frac{-1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}_{\ell}
 \end{aligned}$$

Durch Vergleich erhalten wir die

#### LAGRANGE-FUNKTION UND LAGRANGE-DICHTE DER ELEKTRODYNAMIK

Die Lagrange-Funktion der Elektrodynamik ist

$$\mathcal{L}_{tot}(y^\alpha, \dot{y}^\alpha, [A^\alpha(x^\beta)]) = \mathcal{L} + \int d^3r \ell$$

und die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik ist

$$\ell_{tot}(A^\alpha, \partial_\beta A^\alpha, [y^\alpha(t)], x^\alpha) = \left( c \int dt \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \mathcal{L} \right) + \ell$$

mit

$$\mathcal{L}(y^\alpha, \dot{y}^\alpha, A^\alpha) = -m_0 c \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}} - q A_\mu \frac{dy^\mu}{dt} \quad (11.5)$$

$$\ell(A^\alpha, \partial_\beta A^\alpha) = \frac{-1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (11.6)$$

Es ist zu beachten, dass die Lagrange-Funktion kein Lorentz-Skalar ist. Nur die Wirkung selbst ist ein Lorentz-Skalar.

Es mag nützlich sein, die Lagrange-Funktion für Teilchen in der konventionellen, nicht-kovarianten Schreibweise zu kennen. Wir gehen hier davon aus, dass die Eichpotentiale fest vorgegeben sind. Deshalb liefert  $\ell$  nur einen konstanten Term, der nicht in die Variation der Teilchenbahn eingeht.

LAGRANGE FUNKTION EINES GELADENEN TEILCHENS IN GEGEBENEN  
EICHPOTENTIALEN.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} - q\Phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t) \\ &= -m_0 c^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m_0 \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t)}_{\mathcal{L}_{\text{klass.}}} + O\left(\left(\frac{|\dot{\vec{r}}|}{c}\right)^4\right)\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert den nichtrelativistischen Grenzfall. Die Ruheenergie  $m_0 c^2$  wird üblicherweise weggelassen, da eine Konstante nicht in die Euler-Lagrange Gleichungen eingeht.

Hier erkennt man den Grund dafür, dass die Wirkung im Allgemeinen die Form "Kinetische Energie weniger Potentieller Energie" hat. Die potentielle Energie im elektrischen Potential hat gerade die Form  $V(\vec{r}) = q\Phi(\vec{r})$ .

### 11.3 Das Wirkungsprinzip

Das Wirkungsprinzip, auch Hamiltonsches Prinzip genannt, sagt, dass ein Teilchen genau die Bahn einschlägt, welche die Wirkung extremal macht. Dabei werden alle stetigen Teilchenbahnen verglichen, die zu einer gegebenen Zeit  $t_a$  an einem gegebenen Ort  $\vec{r}_a$  beginnen und zu einer gegebenen Zeit  $t_b$  an einem definierten Ort  $\vec{r}_b$  enden.

Das selbe Prinzip wird jetzt auch auf Felder verallgemeinert. Wir betrachten also einen Raum-Zeit-Bereich  $\Omega$  und alle denkbaren stetigen Felder und Teilchenbahnen, die am Rand des Raum-Zeit vorgegebene Werte besitzen. Von all diesen Bahnen und Feldern werden diejenigen realisiert, welche die Wirkung extremal machen.

Ein wichtiger praktischer Vorteil des Wirkungsprinzips ist, dass es die Zeitentwicklung physikalischer Größen unabhängig von der Wahl der Koordinaten festlegt, in denen die Bahnen und Felder ausgedrückt sind. Das Extremum liegt unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems am selben Ort. Ein weiterer Vorteil ist, dass man die Information der Bewegungsgleichungen in einem einzigen Ausdruck zusammenfassen und überblicken kann, was nützlich ist, wenn man es mit vielen komplexen Bewegungsgleichungen zu tun hat.

Das Wirkungsprinzip leitet sich aus der **Pfadintegralformulierung** der Quantenmechanik ab. In dieser Formulierung kann ein Teilchen gleichzeitig alle möglichen Bahnen durchlaufen. Jeder Pfad trägt dabei eine Phase die über alle Pfade aufaddiert wird, und sich konstruktiv oder destruktiv überlagern kann. Man stellt sich vor, dass ein Teilchen eine komplexe Amplitude  $e^{i\phi(t)}$  trägt, deren Phase  $\phi(t)$  sich mit der Zeit ändert. Die Phase ist proportional zur Wirkung. Überlagern sich die Amplituden vieler Bahnen zu einem Ort konstruktiv, werden wir das Teilchen dort finden. Dies geschieht gerade entlang dem Extremalpfad. Für die Frage, ob sich die Phasen konstruktiv überlagern, ist es unerheblich, ob ein Minimum oder ein Maximum der Wirkung vorliegt. Historisch wurde das Wirkungsprinzip als ein Prinzip der minimalen Wirkung betrachtet, was sich aus einem Prinzip minimaler Energie für das statische Gleichgewicht in der Mechanik ableitet. Diese Vorstellung ist aber überholt.

#### Variationsrechnung

Eine Folgerung des Extremalprinzips ist, dass die erste Variation  $\delta S$  der Wirkung verschwindet, woraus sich die **Euler-Lagrange Gleichungen** ableiten lassen. Das Prinzip lässt sich anhand des Extremalprinzips für Funktionen  $F(\vec{r})$  verdeutlichen. An einem Extremum verschwindet der Gradient der



Funktion

$$\vec{\nabla} F(\vec{r}) = 0$$

Dies lässt sich auch wie folgt ausdrücken: Wir betrachten die Funktion in der Umgebung eines beliebigen Punktes  $\vec{r}_0$ , um zu überprüfen, ob er ein Extremum ist. Der Abstand eines Punktes von unserem Aufpunkt sei  $\delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ .

$$\begin{aligned} F(\vec{r}_0 + \delta\vec{r}) &\stackrel{\text{Taylor}}{=} F(\vec{r}_0) + \delta\vec{r} \vec{\nabla} F(\vec{r}) + O(|\delta\vec{r}|^2) \\ \delta F &\stackrel{\text{def}}{=} F(\vec{r} + \delta\vec{r}) - F(\vec{r}) = \delta\vec{r} \vec{\nabla} F(\vec{r}) + O(|\delta\vec{r}|^2) \end{aligned}$$

Verschwindet also die Variation  $\delta F$  der Funktion für beliebige Variationen  $\delta\vec{r}$ , dann verschwindet der Gradient. Die Ableitung kann man auch als  $\frac{\delta F}{\delta \vec{r}_i}$  für  $|\delta\vec{r}| \rightarrow 0$  definieren. Aus dem Extremalprinzip der Funktion  $F(\vec{r})$  folgt also sofort, dass die erste Variation der Funktion für alle kleinen Variationen  $\delta\vec{r}$  der Position verschwindet. Daraus erhalten wir eine Gleichung, nämlich  $\vec{\nabla} F = 0$ , aus welcher sich die Position des Extremums bestimmen lässt.

Stellen wir uns nun vor, dass die Komponenten des Vektors  $r$  eine Funktion  $x(t)$  in diskretisierter Form beschreiben.

$$r_i \stackrel{\text{def}}{=} x(t_i)$$

Aus der Funktion  $F(\vec{r})$  wird, wenn das Diskretisierungsintervalle  $|t_{i+1} - t_i|$  gegen Null gehen, ein Funktional  $F[x(t)]$ . Das Extremum des Funktional erhalten wir dann analog zum Variationsprinzip der Funktion.

$$\delta F \stackrel{\text{def}}{=} F[x(t) + \delta x(t)] - F[x(t)] = \int dt \delta x(t) \frac{\delta F}{\delta x(t)} + O(\delta x(t)^2)$$

Wir nennen den Ausdruck  $\frac{\delta F}{\delta x(t)}$  die **Funktionalableitung** des Funktional  $F[x(t)]$ .

Für das Extremum muss  $\delta F$  für beliebige Funktionen  $\delta x(t)$  zu erster Ordnung verschwinden, oder, gleichbedeutend, die Funktionalableitung muss für das gesamte Zeitintervall der Bahn verschwinden.

### Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen

Nachdem wir die wesentlichen Begriffe und Prinzipien dargelegt haben, wollen wir das Wirkungsprinzip auf eine Wirkung für Teilchen und Felder anwenden. Um das Prinzip in seiner Allgemeinheit zu verdeutlichen, gehen wir von einer allgemeinen Form der Wirkung aus, und spezialisieren die Ausdrücke anschließend auf das Problem der Elektrodynamik.

Wir betrachten allgemeine Felder  $\Phi_i(x^\mu)$ , die wir später den Eichpotentiale gleichsetzen. Die Wirkung habe die Form Gl. 11.4 auf S. 149

$$S[y(t), \Phi_i(x)] = \int dt \mathcal{L}(y^\alpha(t), \dot{y}^\alpha, \Phi_i(y^\alpha(t))) + \frac{1}{c} \int d^4x \ell(\Phi_i(x^\alpha), \partial_\beta \Phi_i(x^\alpha), x^\alpha)$$

Zunächst bestimmen wir die Variation der Wirkung mit Hilfe eine Taylor-Entwicklung für eine Variation  $\delta y(t)$  der Pfade und eine Variation  $\delta \Phi_i(x^\alpha)$  der Felder.

$$\begin{aligned} \delta S = \int dt & \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} \delta y^\mu(t) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \frac{d}{dt} \delta y^\mu(t)}_A + \overbrace{\left( \delta \Phi_i(y^\alpha(t)) + \delta y^\mu(t) \partial_\mu \Big|_{y^\alpha(t)} \Phi \right)}^{\Phi'_i(y^\alpha) - \Phi_i(y^\alpha)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \right] \\ & + \frac{1}{c} \int d^4x \left[ \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i(x^\alpha) + \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu \delta \Phi_i(x^\alpha)}_B \right] \end{aligned}$$

Um die Ableitungen von  $\delta y(t)$  und  $\delta\Phi_i(x^\alpha)$  abzuwälzen, führen wir eine partielle Integration in der Zeit durch und wenden das Gauß-Theorem in Raum-Zeit an. Zunächst betrachten wir nur die Ausdrücke  $A$  und  $B$  der obigen Gleichung.

$$A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \frac{d}{dt} \delta y^\mu = \frac{d}{dt} \left( \delta y^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \right) - \left( \delta y^\mu \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \right)$$

$$B = \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu \delta \Phi_i = \partial_\mu \left( \delta \Phi_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right) - \delta \Phi_i \partial_\mu \left( \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right)$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \delta S = & \underbrace{\int dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \delta y^\mu(t) \right)}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{c} \int d^4x \partial_\mu \left( \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i(x^\alpha) \right)}_{B_1} \\ & + \underbrace{\int dt \delta y^\mu(t) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \partial_\mu \Phi_i \right]}_{A_2} + \underbrace{\int dt \sum_i \delta \Phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i}}_C \\ & + \frac{1}{c} \int d^4x \sum_i \delta \Phi_i(x^\alpha) \underbrace{\left[ \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right]}_{B_2} + O(\delta y^2, \delta \phi^2, \delta y \delta \Phi) \end{aligned}$$

Die beiden ersten Terme  $A_1$  und  $B_1$  fallen weg. Sehen wir uns zunächst den ersten Term  $A_1$  an

$$A_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \delta y^\mu(t) \right) = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \delta y^\mu(t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Der Term  $A_1$  verschwindet, weil auch der variierte Pfad  $y(t) + \delta y(t)$  dieselben Randbedingungen wie  $y(t)$  erfüllen muss. Deshalb verschwindet  $\delta y(t)$  an den Grenzen des Zeitintegrals.

Nun betrachten wir den zweiten Term,  $B_1$ . Hier wenden wir das Gauß-Theorem an, um das Raumzeit Integral über den Raum-Zeit-Bereich  $\Omega$  auf das Raum-Zeitliche Oberflächenintegral über die Oberfläche  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  umzuwandeln.

$$B_1 = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left( \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i(x^\alpha) \right)$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{c} \oint_{\partial\Omega} dA_\mu \left( \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i(x^\alpha) \right) = 0$$

Da auch die Variation  $\delta\Phi_i(x^\alpha)$  der Felder am Rand  $\partial\Omega$  des Integrationsgebiets  $\Omega$  verschwinden muss, verschwindet dieser Ausdruck.

Wir haben hier das vierdimensionale Gauß-Theorem angewandt. Dabei ist  $\partial_\mu F^\mu = \frac{dF^0}{dx^0} + \frac{dF^1}{dx^1} + \frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^3}{dx^3}$  die normale vierdimensionale Divergenz. Die Oberfläche eines vierdimensionalen Gebiets ist ein dreidimensionales Volumen. Das Flächenelement  $dA_\mu$  wird mit Hilfe des Levi-Civita Symbols  $\epsilon$  als  $dA_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} du^\beta dv^\gamma dw^\delta$  aus den drei Vektoren gebildet, die das 3-dimensionale Hyperflächenelement aufspannen. Es steht senkrecht auf allen drei Vektoren  $du^\alpha$ ,  $dv^\alpha$ ,  $dw^\alpha$  und sein Betrag ist das Volumen des Parallelepipeds, das von den drei Vektoren aufgespannt wird.

Schließlich wollen wir noch den Term  $C$  in ein Raum-Zeit-Integral umwandeln, was wir mittels der  $\delta$ -Funktion erreichen.

$$C = \int dt \sum_i \delta \Phi_i(y^\alpha(t)) \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \right|_{y^\alpha(t), \dot{y}^\alpha(t), \Phi_j(y^\alpha(t))}$$

$$= \frac{1}{c} \int d^4x \sum_i \delta \Phi_i(x^\alpha) \int dt \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \right|_{y^\alpha(t), \dot{y}^\alpha(t), \Phi_j(x^\alpha)} c \delta(x^\alpha - y^\alpha(t))$$

Damit erhalten wir den endgültigen Ausdruck für die Variation der Wirkung

$$\begin{aligned} \delta S = & \int dt \delta y^\mu(t) \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \partial_\mu \Phi_i \right]}_{\frac{\delta S}{\delta y(t)}} \\ & + \frac{1}{c} \int d^4x \sum_i \delta \Phi_i(x^\alpha) \underbrace{\left[ \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} + \int dt c \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \right]}_{\frac{\delta S}{\delta \Phi(x^\alpha)}} \end{aligned}$$

Die Terme in den Klammern sind die Funktionalableitungen der Wirkung. Damit die Variation  $\delta S$  der Wirkung für beliebige Variationen der Pfade und der Felder verschwinden, müssen die Funktionalableitungen verwischwinden. Aus  $\frac{\delta S}{\delta y^\mu} = 0$  und  $\frac{\delta S}{\delta \Phi_i} = 0$  folgen also die Euler-Lagrange Gleichungen.

#### EULER-LAGRANGE GLEICHUNGEN

Für eine Wirkung der Form

$$S = \int dt \mathcal{L}(y^\alpha(t), \dot{y}^\alpha(t), \Phi_i(y^\alpha(t))) + \frac{1}{c} \int d^4x \ell(\Phi_i, \partial_\nu \Phi_i, x^\alpha)$$

lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta S}{\delta y^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \partial_\mu \Phi_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (11.7)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} + \int dt c \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \stackrel{!}{=} 0 \quad (11.8)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen für die Pfade und partielle Differentialgleichungen für die Felder. Diese sind die Bewegungsgleichungen für die Teilchenbahnen und Felder.

Zusammenfassend sehen wir hier, dass ein einziges Funktional, die Wirkung, die gesamte Information über die Bewegungsgleichungen enthält. Bei Systemen mit vielen Teilchen und Feldern wird dadurch die Übersichtlichkeit erheblich gesteigert. Darüber hinaus wird dadurch sichergestellt, dass die Bewegungsgleichungen konsistent aufgestellt werden.

## 11.4 Euler-Lagrange Gleichungen der Elektrodynamik

Die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik, Maxwellgleichungen und Newtonsche Bewegungsgleichung mit der Lorentz-Kraft, erhalten wir einfach, indem wir nun die entsprechenden Größen der Elektrodynamik, Gl. 11.5 und Gl. 11.6, in die Euler-Lagrange Gleichungen, Gl. 11.7 und Gl. 11.8 einsetzen. Wir ersetzen  $\Phi_i$  durch  $A^\nu$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \partial_\mu A^\nu \\ 0 &= \frac{\partial \ell}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} + \int dt c \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch die entsprechenden Ableitungen der Lagrange Funktion  $\mathcal{L}$  und der Lagrange-Dichte  $\ell$  einsetzen.

### 11.4.1 Lorentz Kraft

Zunächst bestimmen wir uns die Ableitungen der Lagrange-Funktion, Gl. 11.5 auf S. 151<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y^\alpha, \dot{y}^\alpha, A^\alpha) &= -m_0 c \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}} - q A_\mu \frac{dy^\mu}{dt} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} &= -m_0 c \frac{1}{2 \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} 2 \frac{dy_\mu}{dt} - q A_\mu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} &= -q \frac{dy_\nu}{dt}\end{aligned}$$

Diese setzen wir in die Euler-Lagrange-Gleichung, Gl. 11.7 ein.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \partial_\mu A^\nu \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{-m_0 c}{\sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} \frac{dy_\mu}{dt} - q A_\mu(y^\alpha(t)) \right) - q \frac{dy^\nu}{dt} \partial_\mu A_\nu \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c}{\sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} \frac{dy_\mu}{dt} \right) + \left( q \frac{dy^\nu}{dt} \partial_\nu A_\mu \right) - q \frac{dy^\nu}{dt} \partial_\mu A_\nu \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{-m_0 c}{\sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} \frac{dy_\mu}{dt} \right) + q (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \frac{dy^\nu}{dt}\end{aligned}$$

Wir erhalten die

BEWEGUNGSGLEICHUNG FÜR EIN GELADENES TEILCHEN

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{m_0 c}{\sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}}}_M \frac{dy_\mu}{dt} \right) = q \underbrace{(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)}_{F_{\mu,\nu}} \frac{dy^\nu}{dt} \quad (11.9)$$

Es bietet sich an, zwei Größen zu definieren:

**Definition 11.3** RELATIVISTISCHE MASSE

$$M(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_0 c}{\sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.10)$$

Die relativistische Masse  $M$  ist selber geschwindigkeitsabhängig. Mit zunehmender Geschwindigkeit wächst die relativistische Masse an und wird bei der Lichtgeschwindigkeit unendlich. Dies erklärt, dass man Masseteilchen nicht bis zur Lichtgeschwindigkeit oder darüber hinaus beschleunigen können.

<sup>8</sup>Es ist strikt drauf zu achten von welchen Parametern die Lagrange Funktion abhängt. Ersetzt man in der Lagrange-Funktion  $A^\mu$  mit  $A^\mu(y^\alpha(t))$  und betrachtet  $A^\mu$  als vorgegebenes Feld, dann erhält man ein endliches Resultat für  $\partial \mathcal{L} / \partial y^\mu$ . Dafür verschwindet  $\partial \mathcal{L} / \partial A^\nu$ . In beiden Fällen erhält man dieselben Bewegungsgleichungen für die Teilchen. Es sind aber grundsätzlich verschiedene Situationen. Eine Vermischung führt zu einer Doppelzählung und zu einem falschen Resultat.

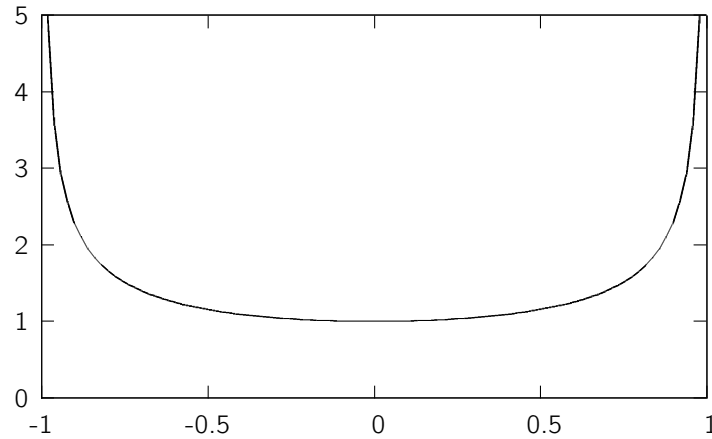


Abb. 11.1: Relativistische Masse eines Teilchens der Masse eins als Funktion der Geschwindigkeit als in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit.

Die zweite Größe, die sich ergeben hat, ist der Feldstärketensor  $F^{\mu,\nu}$ .

**Definition 11.4** *FELDSTÄRKETENSOR*

$$F^{\mu,\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (11.11)$$

Um die Bedeutung des Feldstärketensors zu erkennen, betrachten wir seine einzelnen Komponenten, wobei wir  $A^\mu = (\Phi/c, \vec{A})$  und  $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla})$  und den bekannten Zusammenhang  $\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}$  und  $\vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \times \vec{A}$  zwischen Eichpotentialen und den elektrischen und magnetischen Feldern verwenden.<sup>9</sup>

$$F^{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}\partial_t A_x + \partial_x \frac{1}{c}\Phi & \frac{1}{c}\partial_t A_y + \partial_y \frac{1}{c}\Phi & \frac{1}{c}\partial_t A_z + \partial_z \frac{1}{c}\Phi \\ \dots & 0 & -\partial_x A_y + \partial_y A_x & -\partial_x A_z + \partial_z A_x \\ \dots & \dots & 0 & -\partial_y A_z + \partial_z A_y \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Gl. 9.1,9.2}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

In der ersten Gleichung wurde nur eine Hälfte des Tensors ausgefüllt. Die andere ergibt sich aus der Antisymmetriebedingung  $F^{\mu,\nu} = -F^{\nu,\mu}$ , die sich aus ihrer Definition Gl. 11.11 ergibt. Der Feldstärketensor beschreibt also gerade die elektrischen und magnetischen Felder.

Wenn wir den Feldstärketensor in die elektrischen und magnetischen Felder zerlegen, erhalten wir

<sup>9</sup>Beachte, dass der Zusammenhang zwischen den Eichpotentialen und den elektromagnetischen Feldern an diesem Punkt der Theorie die Definition der Felder darstellt, weil die Wirkung bisher ausschließlich mittels der Eichpotentiale formuliert wurde.

aus der Euler-Lagrange Gleichung Gl. 11.9

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( M(\vec{v}) \frac{dy^\mu}{dt} \right) &= q F^{\mu,\nu} \frac{dy_\nu}{dt} \\
 &= q \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} q/c \vec{v} \vec{E} \\ q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \\ q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \\ q(E_z + v_x B_y - v_y B_x) \end{pmatrix} \quad (11.12)
 \end{aligned}$$

Aus den letzten drei Komponenten erhalten wir die Kraftgleichung und damit den Ausdruck für die Lorentz Kraft

#### RELATIVISTISCHE BEWEGUNGSGLEICHUNG EINES GELADENEN TEILCHENS

$$\frac{d}{dt} (M(\vec{v}) \vec{v}) = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (11.13)$$

Diese Bewegungsgleichung unterscheidet sich von der nichtrelativistischen Gleichung nur dadurch, dass die Ruhemasse durch die relativistische Masse ersetzt wird. Es ist zu beachten, dass die Lorentz Kraft auf der rechten Seite keine Kraft im eigentlichen Sinne ist. Auf der linken Seite steht nämlich der kinetische Impuls und nicht der kanonische Impuls. Wie wir noch sehen werden, unterscheiden sich die beiden Impulse gerade im elektromagnetischen Feld. Die eigentliche Kraft ist die Zeitableitung des kanonischen Impulses.

Die erste Komponente der Euler-Lagrange-Gleichung Gl. 11.9, bzw. Gl. 11.12, ist die Energieerhaltung. Einen Hinweis darauf erhält man im nichtrelativistischen Grenzfall  $|\vec{v}| \rightarrow 0$  mit statischen Feldern.<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}
 0 &= \left( \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \right) - q \vec{v} \vec{E} \\
 &= \left( \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \right) + q \vec{v} \vec{\nabla} \Phi \\
 &= \left( \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + q \Phi \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left( m_0 c^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{E_{kin}} + \underbrace{q \Phi}_{E_{pot}} \right) + O(v^4) \\
 &= \frac{d}{dt} (E_{kin} + E_{pot})
 \end{aligned}$$

### 11.4.2 Maxwellgleichungen

Nun bestimmen wir die Bewegungsgleichung für die Eichpotentiale aus Gl. 11.8 auf S. 155, nämlich

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} + \int dt \, c \, \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu}$$

<sup>10</sup>Das ist kein Beweis!

mit der Lagrange Funktion von Gl. 11.5 und der Lagrange Dichte von Gl. 11.5 auf S.151.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y^\alpha, \dot{y}^\alpha, A^\alpha) &= -m_0 c \sqrt{\frac{y_\mu}{dt} \frac{y^\mu}{dt}} - q A_\mu \frac{y^\mu}{dt} \\ \ell(A^\alpha, \partial_\beta A^\alpha) &= \frac{-1}{4\mu_0} \left( \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \left( \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right)\end{aligned}$$

Wir bestimmen wiederum zuerst die Ableitungen von  $\mathcal{L}$  und  $\ell$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial A^\nu} &= 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} &= -\frac{1}{\mu_0} \left( \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu \right) = -\frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\nu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} &= -q \frac{dy_\nu}{dt}\end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \ell}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} + \int dt \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \\ &= \partial_\mu \frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\nu - q \underbrace{\int dt \frac{dy_\nu}{dt} \delta(x^\alpha - y^\alpha(t))}_{j^\mu(x^\alpha)}\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen für die Felder können also in die folgende Form gebracht werden:

MAXWELLGLEICHUNGEN IN KOVARIANTER FORM

$$\underbrace{\partial_\mu \left( \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right)}_{F^{\mu\nu}} = \mu_0 q c \underbrace{\int dt \frac{dy^\nu}{dt} \delta(x^\alpha - y^\alpha(t))}_{j^\mu(x^\alpha)} \quad (11.14)$$

$$\partial_\mu F^{\mu,\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (11.15)$$

Dabei ist  $F^{\mu,\nu}$  der Feldstärketensor und  $j^\mu$  die Viererstromdichte, Gl. 10.11.

Wenden wir diese Definition auf ein geladenes Teilchen an, erhalten wir mit Hilfe von Gl. 2.3 auf S. 16 und Gl. 2.8 auf S. 19 die Komponenten der Viererstromdichte. Wir beginnen mit der zeitlichen Komponente

$$\begin{aligned}j^0(\vec{r}, t) &\stackrel{\text{Gl. 10.11}}{=} c \rho(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Gl. 2.3}}{=} q c \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) = q c \int dt' \delta(\vec{r} - \vec{y}(t')) \delta(t - t') \\ &= q c \int dt' \underbrace{\frac{dy^0}{dt'}}_c \delta(\vec{r} - \vec{y}(t')) \underbrace{\delta(ct - ct')}_{\frac{1}{c} \delta(t - t')} \\ \Rightarrow j^0(x^\alpha) &= q c \int dy^0 \delta(x^\alpha - y^\alpha(t))\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die räumlichen Komponenten  $j^i$  mit  $i = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned}\vec{j}(\vec{r}, t) &\stackrel{\text{Gl. 2.8}}{=} q \frac{d\vec{y}}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) = q \int dt' \frac{d\vec{y}}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) \delta(t - t') \\ &= q c \int dt' \frac{d\vec{y}}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) \delta(ct - ct') \\ \vec{j}(x^\alpha) &= q c \int d\vec{y} \delta(x^\alpha - y^\alpha)\end{aligned}$$

## VIERERSTROMDICHT EINES GELADENEN TEILCHENS

$$j^\mu(x^\alpha) = qc \int dt \underbrace{\frac{dy^\nu}{dt}}_{dy^\nu} \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) = qc \int dy^\nu \delta(x^\alpha - y^\alpha) \quad (11.16)$$

Dabei ist  $y^\mu(t)$  die Bahn der Punktladung.

Um uns zu überzeugen, dass dies der Viererstromdichte entspricht, untersuchen wir ihre Komponenten

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} j^0(\vec{r}, t) = q \int dt' \underbrace{\frac{dy^0}{dt'}}_c \underbrace{\frac{1}{c} \delta(t - \frac{1}{c} y^0(t'))}_{\delta(x^0 - y^0(t'))} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t')) \\ &= q \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= qc \int dt' \underbrace{\frac{d\vec{y}}{dt'}}_c \underbrace{\frac{1}{c} \delta(t - \frac{1}{c} y^0(t'))}_{\delta(x^0 - y^0(t'))} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t')) \\ &= q \frac{d\vec{y}(t)}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) \end{aligned}$$

Wir erhalten also gerade die bekannten Ausdrücke Gl. 2.3 auf S. 16 und Gl. 2.8 auf S. 19.

Nach diesem Exkurs zur Viererstromdichte kommen wir auf die Bewegungsgleichungen zurück: Gl. 11.14 kann auf den bekannten Ausdruck Gl. 10.14 auf S. 142 abgebildet werden.

$$\partial_\mu F^{\mu,\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 j^\nu$$

Den Zusammenhang von Gl. 11.14 mit den Maxwellgleichungen sieht man durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu,\nu} &= \mu_0 j^\nu \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} &= \mu_0 \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \vec{E} \\ \frac{1}{c^2} \partial_t E_x - \partial_y B_z + \partial_z B_y \\ \frac{1}{c^2} \partial_t E_y + \partial_x B_z - \partial_z B_x \\ \frac{1}{c^2} \partial_t E_z - \partial_x B_y + \partial_y B_x \end{pmatrix} &= \mu_0 \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \\ \epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} \stackrel{c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}{=} -\rho \quad \text{und} \quad \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Tatsächlich sind dies nur die beiden Maxwellgleichungen, Gl. 3.1 und Gl. 3.4 mit den Quellen (Ladungs- und Stromdichten). Die anderen beiden, Gl. 3.2 und Gl. 3.3, ergeben sich aus den Gleichungen, Gl. 9.1 und Gl. 9.2, d.h.  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A}$  und  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , welche die Felder mit Hilfe der bekannten Eichpotentiale definieren.

Die Tatsache, dass elektrische und magnetische Felder gemeinsam in einem Tensor auftreten, deutet darauf hin, dass beide Felder verschiedene Aspekte einer einzigen Wechselwirkung sind. Ein Gedankenexperiment verdeutlicht das:

- Ein ruhender Beobachter betrachtet eine geladenes Teilchen das mit einer Geschwindigkeit durch ein Magnetfeld fliegt. Aufgrund der Lorentzkraft wird es abgelenkt, also beschleunigt.



- Nun betrachten wir dasselbe Problem aus der Sicht eines Beobachters, der sich mit dem Teilchen mitbewegt bevor es in das Magnetfeld eintritt. Auch dieser Beobachter bemerkt eine Beschleunigung des Teilchens, kann diese aber nicht durch ein Magnetfeld erklären: aus der Sicht dieses Beobachters ruht das Teilchen und Magnetfelder verursachen keine Beschleunigung ruhender Ladungen. Dieser Beobachter muss die Beschleunigung also auf eine andere Kraft zurückführen. Diese Wechselwirkung ist gerade das elektrische Feld.

## 11.5 Aufgaben

### 11.5.1 Wirkungsprinzip der Schrödinger Gleichung

Die Wirkung, welche die Schrödinger Gleichung für ein teilchen in einem Potential  $V(\vec{r})$  liefert, hat die Form

$$S[\Psi(\vec{r}, t)] = \int dt \int d^3r \left[ i\hbar \Psi^* \partial_t \Psi + \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \Psi)(\vec{\nabla} \Psi)^* + V(\vec{r}, t) \Psi^* \Psi \right]$$

Dabei ist  $\Psi(\vec{r}, t)$  die quantenmechanische Wellenfunktion. Die Interpretation der Wellenfunktion ist, dass  $P(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t)$  die Wahrscheinlichkeit ist, ein Teilchen zur Zeit  $t$  am Ort  $\vec{r}$  zu finden. Beachte, dass die Wellenfunktion komplexwertig ist, was bedeutet, dass Real- und Imaginärteil als unabhängige Felder betrachtet werden müssen. Alternativ, und das ist einfacher kann man mit Wirtinger Ableitungen arbeiten. Diese sind zum Beispiel im Mathematischen Anhang von  $\Phi\text{SX}$ : Klassische Mechanik beschrieben.

Leite die Schrödinger Gleichung als Euler-Lagrange Gleichung der obigen Wirkung her. Das Ziel der Aufgabe ist es, nicht nur die Wirkung in den bekannten Ausdruck der Euler-Lagrange Gleichungen zu übertragen, sondern die Euler-Lagrange Gleichungen für dieses Problem abzuleiten, um das Wirkungsprinzip zu rekapitulieren.



## Chapter 12

# Noethertheorem

Das **Noethertheorem**[15] sagt, dass aus jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße folgt. Es ist damit einer der fundamentalsten Sätze der Physik. Eine Erhaltungsgröße erlaubt Voraussagen, die beliebig weit in die Zukunft reichen. Solche Aussagen erfordern sonst die Lösung von Differentialgleichungen, was aufwändig ist und selbst numerisch in den allermeisten Fällen nicht möglich ist, da sich komplexe Systeme zumeist chaotisch verhalten. **Chaotisches Verhalten** führt dazu, dass die Vorhersagen nach einer gewissen Zeit extrem sensibel von den Anfangsbedingungen abhängen, sodass die Vorhersagekraft in der Praxis bald verschwindet.

Das Noethertheorem führt die Erhaltungsgrößen auf Energie und Impuls zurück. Es liefert also die Definition von Energie und Impuls und verdeutlicht die fundamentale Bedeutung dieser Größen.

Wir werden sehen, dass auch Felder wie die Eichpotentiale, genau wie Teilchen, Energie und Impuls tragen. Dies führt uns auf Ausdrücke wie die Energiestromdichte und den Strahlungsdruck des elektromagnetischen Feldes. Dies wiederum führt uns auf den Begriff eines **Quasiteilchens**, der in der Festkörperphysik von grosser Bedeutung ist. In unserem Fall besteht das Quasiteilchen aus der Punktladung und den Eichpotentialen, welche die Punktladung mit sich herumschleppt. Die Energie und der Gesamtimpuls des Quasiteilchens ist daher größer als für das Punktteilchen alleine. Das Teilchen verhält sich also so als wäre es schwerer als sein eigentliche Masse.

Die Eigenschaft von Feldern, Energie und Impuls zu tragen, deutet wiederum auf die Quantenmechanik hin, bei der sich der Unterschied zwischen Teilchen und Feldern verwischt. So werden in der Quantenmechanik Elektronen, also Teilchen, auch durch ein Feld, die Wellenfunktion, beschrieben, während wir für das elektromagnetische Feld das Teilchenkonzept der Photonen einführen.

### Symmetrien

#### SYMMETRIE

Betrachten wir ein dynamisches System. Das System ist durch seine Bewegungsgleichungen bestimmt. Das Resultat der Bewegungsgleichungen sind physikalische Trajektorien von Punktteilchen  $\vec{r}(t)$  und Feldern  $\Phi(\vec{r}, t)$ . Eine Transformation bildet diesen Satz von Trajektorien auf neue Trajektorien ab. Eine Symmetrie des dynamischen Systems ist eine Transformation, die alle physikalischen Trajektorien, welche also die Bewegungsgleichungen erfüllen, auf einen neuen Satz von Trajektorien abbildet, die wiederum die Bewegungsgleichungen erfüllen.

Eine Transformation der Koordinaten und Felder ist eine Symmetrietransformation eines Systems, wenn die Bewegungsgleichungen unter der Transformation dieselbe Form beibehalten. Für ein System, das aus Teilchen besteht, bedeutet das, dass wir wieder eine physikalische<sup>1</sup> Teilchenbahn erhalten, wenn wir eine physikalische Teilchenbahn mit einer Symmetrietransformation transformieren. Gehen

<sup>1</sup>Wir nennen eine Bahn, welche die Bewegungsgleichungen erfüllt, bzw. die Wirkung extremal macht, physikalisch.

auch Felder als dynamische Variablen in die Wirkung ein, gilt das selbe für die zeitliche Entwicklung des Feldes. Dabei ist wichtig, dass alle dynamischen Variablen des Systems, und nur diese, gleichzeitig transformiert werden.

Kennt man die Wirkung des Systems, welche die Bewegungsgleichungen bestimmt, dann bedeutet eine Symmetrie, dass sich die Wirkung unter der Symmetrietransformation nicht verändert.

Für affine Abbildungen, kann man sich Symmetrien so vorstellen: Wir stellen uns zwei Beobachter  $A$  und  $B$  vor, deren Position und Lage sich nur durch eine Transformation unterscheidet. Wenn es den beiden Beobachtern nicht möglich ist, anhand von Experimenten einen Unterschied zwischen  $A$  und  $B$  festzustellen, ist die Transformation eine Symmetrietransformation.

### Erhaltungssätze

Wir haben in der Klassischen Mechanik zwei Arten von Erhaltungssätzen kennengelernt. Ich möchte diese hier noch einmal erwähnen, weil man einen Erhaltungssatz erkennen sollte, wenn man ihn sieht.

- Das Noethertheorem für Teilchen hat die Form

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

mit der Erhaltungsgröße

$$Q = \vec{p} \frac{d\vec{r}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - E \frac{d\vec{t}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = -p_\mu \frac{dx'^\mu}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$$

wobei  $\vec{r}(\vec{r}, t, \varepsilon)$  und  $\vec{t}(\vec{r}, t, \varepsilon)$  eine Symmetrietransformation der Orts- und Zeitkoordinaten beschreiben, die von einem kontinuierlichen Parameter  $\varepsilon$  abhängt. Der Viererimpuls hat die Komponenten  $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ . (Siehe Definition Gl. 12.8)

- die zweite Art von Erhaltungssätzen entspricht dem Ladungserhaltungssatz

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (12.1)$$

wobei  $\rho(\vec{r}, t)$  die Ladungsdichte und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  die Stromdichte ist. Die Viererstromdichte hat die Form  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$

Oben in Gl. 12.1 haben wir die differentielle Form des Erhaltungssatzes verwendet. Die integrale Form ist der physikalischen Interpretation zugänglicher. Man erhält sie durch Integration des differentiellen Erhaltungssatz über den einen räumlichen Bereich  $\Omega$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_\Omega d^3r \rho}_{Q(t)} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \cdot \vec{j}}_I \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega d^3r \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (12.2)$$

Interpretieren wir  $\rho$  als Teilchendichte, dann liest sich die Gleichung wie folgt: "Die Zunahme der Teilchenzahl  $Q$  in einem Bereich  $\Omega$  ist gleich der Anzahl der Teilchen  $-I$ , die durch die Oberfläche in den Bereich eintreten." Interpretieren wir sie als Ladungsdichte, liest sie sich als "Die Zunahme der Ladung  $Q$  in einem Bereich  $\Omega$  ist gleich dem Strom  $-I$ , der durch die Oberfläche in den Bereich fließt."

Schließlich kann man den Erhaltungssatz noch über die Zeit integrieren und erhält so die kovariante Form des integralen Erhaltungssatzes.

$$\int_{\Omega \times [t_1, t_2]} d^4x \partial_\mu j^\mu = 0$$

Der letzte Satz gilt nicht nur für spezielle Raum-Zeit-Bereiche der Form  $\Omega \times [t_1, t_2]$ , sondern für beliebige Raum-Zeit-Bereiche.

Den differentiellen Erhaltungssatz erhält man, indem man den Raum-Zeit-Bereich auf einen beliebigen Punkt zusammenschrumpfen lässt.

## 12.1 Das Noethertheorem

Wir betrachten eine kontinuierliche Transformation, welche zunächst die Koordinaten transformiert

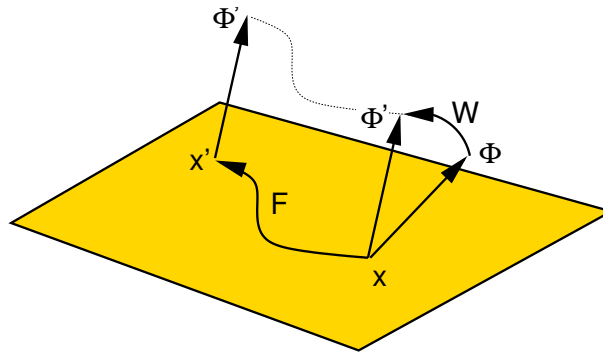
$$x'^{\mu} = F^{\mu}(x^{\alpha}, \varepsilon)$$

Darüber hinaus werden aber auch die Felder ineinander transformiert. Wie beschreiben die Felder durch die Variablen  $\Phi_i(x^{\alpha})$ , um von den Eichpotentialen zu abstrahieren und das Noethertheorem in seiner ganzen Allgemeinheit untersuchen zu können. Bei der Transformation werden die Komponenten der Feldes  $\Phi_i$  am Ort  $x^{\nu}$  auf die Komponenten der transformierten Felder  $\Phi'_i$  am neuen Ort  $x'^{\nu}$  abgebildet. Diese Transformation wird durch die Funktionen  $W_i$  beschrieben.

$$\Phi'_i(x'^{\nu}(x^{\alpha}, \varepsilon), \varepsilon) = W_i(\Phi_j(x^{\alpha}), x^{\alpha}, \varepsilon)$$

Für  $\varepsilon = 0$  soll die Transformation in die Identität übergehen:

$$\begin{aligned} F^{\mu}(x^{\alpha}, \varepsilon = 0) &= x^{\mu} \\ W_i(\Phi_j, x^{\alpha}, \varepsilon = 0) &= \Phi_i \end{aligned}$$



### NOETHERTHEOREM

Das Noethertheorem sagt, dass aus jeder Symmetry, die eine kontinuierliche Transformation ist, ein Erhaltungssatz folgt. Es lautet

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \quad (12.3)$$

wobei  $J^{\mu}$  die Noetherstromdichte ist. Die Noetherstromdichte ist für eine Wirkung der Form  $S = \int dt \mathcal{L} + \frac{1}{c} \int d^4x \ell$  von der Form

$$\begin{aligned} J^{\mu}(x^{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} & \left[ \int dy^{\mu} \delta(x^{\alpha} - y^{\alpha}) \left( \left[ \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^{\delta}} \dot{y}^{\delta} \right] g^0_{\nu} + c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^{\nu}} \right) \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial \varepsilon} \right] \\ & + \left[ \ell g^{\mu}_{\nu} - \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \Phi_i)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^{\nu}} \right] \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ & + \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \Phi_i)} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (12.4)$$

Dabei werden alle Ausdrücke für die physikalischen Pfade und Felder ausgewertet.

Das Noethertheorem ergibt sich direkt aus Gl. 12.33 und Gl. 12.34 auf S. 190, die in Kapitel 12.3 hergeleitet werden.

Der Erhaltungssatz

$$0 = \int d^3r \partial_\mu J^\mu = \int d^3r \left[ \partial_t \left( \frac{1}{c} J^0 \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right] = \frac{d}{dt} \underbrace{\int d^3r \frac{1}{c} J^0}_Q + \int d\vec{A} \cdot \vec{J}$$

hat gerade die Form des integralen Erhaltungssatzes der Ladungserhaltung. Aus diesem Grund nennt man  $Q$  auch die Noetherladung. Die Noetherladung in einem Volumen ändert sich also nur, wenn ein Noetherstrom  $\vec{J}$  einen Teil der Noetherladung in das Volumen hineintransportiert.

**Definition 12.1 NOETHERLADUNG**

Die Noetherladung in einem Volumen  $\Omega$  ist

$$Q(t) = \int_{\Omega} d^3r \frac{1}{c} J^0(\vec{r}, t) \quad (12.5)$$

Die Noetherladung im gesamten Raum ist daher erhalten. Die Noetherladung ist eine Invariante der Bewegung.  $J^0$  ist die zeitliche Komponente der Noetherstromdichte Gl. 12.4.

Ich gehe davon aus, dass die Noetherladung in der Literatur nur bis auf den Vorfaktor einheitlich definiert ist. In [16] wird zum Beispiel der Faktor  $1/c$  weggelassen. Die von mir gewählte Definition wurde durch die Analogie mit dem Ladungserhaltungssatz motiviert, bei dem die Ladungsdichte über  $\rho = \frac{1}{c} j^0$  mit der Viererstromdichte verknüpft ist.

### 12.1.1 Noethertheorem für Teilchen

#### Viererimpuls

Um uns der Bedeutung des Noethertheorems zu nähern, betrachten wir zunächst den mechanischen Teils des Noetherstroms. Das bedeutet, dass wir uns nur auf die Teilchen konzentrieren und die Felder als vorgegeben ansehen. Die Felder werden hier also als Teil der Lagrange Funktion angesehen und nicht mehr als eine dynamische Variable. Wir werden dabei eine ganze Reihe von neuen physikalischen Größen kennenlernen, die wir später auf Felder übertragen werden. Anhand der Teilchen, die uns bereits vertraut sind, lässt sich deren Bedeutung einfacher erschließen.

Die Noetherstromdichte eines Teilchens ist gemäß Gl. 12.4

$$\begin{aligned} J_{mech}^\mu(x^\alpha) &= \left[ \int dy^\mu \delta(x^\alpha - y^\alpha) \underbrace{\left( \left[ \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\delta} \dot{y}^\delta \right] g^0_\nu + c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\nu} \right)}_{-p_\nu c} \frac{\partial x'^\nu}{\partial \epsilon} \right] \\ &= - \int dy^\mu \delta(x^\alpha - y^\alpha) p_\nu c \frac{\partial x'^\nu}{\partial \epsilon} \end{aligned} \quad (12.6)$$

Dabei haben wir den kanonischen Viererimpuls eingeführt, der wie folgt definiert ist.

**Definition 12.2 KANONISCHER VIERERIMPULS VON TEILCHEN**

Der **kanonische Viererimpuls** von Teilchen  $p_{\text{mech}}^\mu(t)$  hat die Form

$$p^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\nu} \dot{y}^\nu - \mathcal{L} \right] g^{0,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_\mu} \quad (12.7)$$

Der Viererimpuls hat, wie im Folgenden gezeigt wird, die Komponenten

$$p^\mu \triangleq \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (12.8)$$

Energie  $E$  und Impuls  $\vec{p}$  können also zu einem Viererimpuls kombiniert werden.

Im folgenden werden wir den Viererimpuls analysieren und an Hand der Definition Gl. 12.7 zeigen, dass seine Komponenten gerade entsprechend Gl. 12.8 mit Energie und dem kanonischen Impuls zusammenhängen. Wir betrachten den Viererimpuls  $p_\mu$  komponentenweise. Dabei übersetzen wir den Ausdruck aus der kovarianten Schreibweise in eine Zeit und Ortsdarstellung.

- Zunächst wenden wir uns dem räumlichen Teil des Viererimpulses zu. Für die Raumkomponenten  $i \in \{1, 2, 3\}$  verschwindet  $g^{0,i}$ , sodass der erste Term in Gl. 12.7 verschwindet. Der zweite Term ist die Ableitung nach einem kovarianten Vektor, den wir zunächst in einen kontravarianten umwandeln. Dabei wechselt sein Vorzeichen für die räumlichen Komponenten.

$$p_i = + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i}$$

Beachte, dass dies die Komponenten eines regulären räumlichen Vektors  $\vec{p}$  sind, bei dem nicht mehr zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren unterschieden wird. Zur Unterscheidung haben wir deshalb lateinische Buchstaben als Indizes gewählt.

Wir haben hier gerade die Definition des räumlichen Teils des kanonischen Impulses erhalten, wie wir in aus  $\Phi\text{SX:Klassische Mechanik}$  kennen. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir hier die Definition des kanonischen Impulses.

**Definition 12.3 KANONISCHER IMPULS EINES TEILCHENS**

Der **kanonische Impuls**  $\vec{p}$  hat die Komponenten

$$p_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \quad (12.9)$$

Dabei ist  $\vec{y}(t)$  die Bahn des Teilchens.

Betrachten wir als Beispiel ein nicht-relativistisches Teilchen in einem Potential mit der Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(\vec{y}, \dot{\vec{y}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{y}}^2 - V(\vec{y})$ , dann ist der zugehörige Impuls

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} = m \dot{y}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = m \vec{v}$$

Dabei ist  $\vec{v} = \dot{\vec{y}}$  die Geschwindigkeit des Teilchens.

- Nun betrachten wir die zeitartige Komponente  $p^0$  des Viererimpulses aus Gl. 12.7.

$$\begin{aligned}
 p^0 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{y}}^\nu} \dot{y}^\nu - \mathcal{L} \right] \underbrace{g^{0,0}}_{=1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_0} \\
 &\stackrel{\dot{y}^0=c}{=} \frac{1}{c} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \dot{y}_i \right) - \mathcal{L} \right] \\
 &\stackrel{\text{Gl. 12.9}}{=} \frac{1}{c} \left[ \vec{p} \cdot \dot{\vec{y}} - \mathcal{L} \right]
 \end{aligned}$$

Dies ist aber, bis auf den Faktor  $1/c$ , die Energie, bzw. die Hamiltonfunktion, wie sie in  $\Phi\text{SX}$ : Klassische Mechanik definiert wurde. Wegen seiner Bedeutung wiederholen wir diese Definition.

**Definition 12.4 ENERGIE EINES TEILCHENS**

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \vec{p}(t) \dot{\vec{y}}(t) - \mathcal{L}(\vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t), t) \quad (12.10)$$

Dabei ist  $\vec{y}(t)$  die Bahn des Teilchens und  $\vec{p}(t)$  sein kanonischer Impuls.

Betrachten wir wieder das Beispiel eines nicht-relativistischen Teilchen in einem Potential mit der Lagrange Funktion  $\mathcal{L}(\vec{y}, \dot{\vec{y}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{y}}^2 - V(\vec{y})$ , dann ist die Energie

$$\begin{aligned}
 E &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{y}} - \mathcal{L}(\vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t), t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{y}} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{y}}^2 + V(\vec{y}) \\
 &\stackrel{\vec{p}=m\dot{\vec{y}}}{=} \frac{1}{2} m \dot{\vec{y}}^2 + V(\vec{y}) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(\vec{y})
 \end{aligned}$$

### Noetherladung

Wir wollen uns die Noetherladung des mechanischen Systems genauer ansehen:

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{mech}} &\stackrel{\text{Gl. 12.5}}{=} \int d^3r \frac{1}{c} J_{\text{mech}}^0(\vec{r}, t) \\
 &\stackrel{\text{Gl. 12.6}}{=} - \int d^3r \int \underbrace{d\bar{t}}_{=dy^0} \underbrace{\frac{dy^0}{d\bar{t}} \frac{1}{c} \delta(t-\bar{t}) \delta(\vec{r}-\vec{\bar{r}})}_{\delta(x^\alpha - y^\alpha)} p_\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial \epsilon} \\
 &= -p_\mu(t) \frac{\partial x'^\mu(\vec{r}, t)}{\partial \epsilon} = - \left( \underbrace{\frac{1}{c} E}_{p_0} \underbrace{c \frac{\partial t'}{\partial \epsilon}}_{\frac{\partial x'^0}{\partial \epsilon}} + \vec{p} \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \epsilon} \right) \\
 &= - \left[ E \frac{\partial t'}{\partial \epsilon} - \vec{p} \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \epsilon} \right]
 \end{aligned}$$

Dies ist die bekannte Form der allgemeinen Erhaltungsgröße, wie wir sie in  $\Phi\text{SX}$ : Klassische Mechanik kennengelernt haben.

Wir erkennen, dass bei Zeittranslationssymmetrie die Energie erhalten bleibt. In diesem Fall ist

$$t'(\vec{r}, t, \epsilon) = t + \epsilon \quad \wedge \quad \vec{r}'(\vec{r}, t, \epsilon) = \vec{r}$$

Durch Einsetzen erhalten wir  $Q_{\text{mech}} = -E$



Der Impuls ist die Erhaltungsgröße von Systemen, die symmetrisch bezüglich einer Verschiebung im Raum sind. Wir betrachten eine Verschiebung in Richtung des Einheitsvektors  $\vec{e}_i$ . In diesem Fall ist die Transformation

$$t'(\vec{r}, t, \varepsilon) = t \quad \wedge \quad \vec{r}'(\vec{r}, t, \varepsilon) = \vec{r} + \vec{e}_i \varepsilon$$

Durch Einsetzen erhalten wir  $Q_{mech} = p_i$ .

### Energie-Impulstensor

Den Zusammenhang zwischen Noetherstromdichte Gl. 12.6 und Transformation  $\frac{dx'^\nu}{d\varepsilon}$  lässt sich elegant mit dem Energie-Impuls Tensor darstellen.

#### Definition 12.5 ENERGIE-IMPULS TENSOR

Der Energie-Impuls Tensor verknüpft die Noetherstromdichte mit den  $\varepsilon$ -Ableitungen der Koordinatentransformation.

$$J^\mu(x^\alpha) = -\frac{dx'^\nu(x^\alpha)}{d\varepsilon} T^{\nu,\mu}(x^\alpha) \quad (12.11)$$

Beachte, dass Transformationen der Felder, die nicht auf Koordinatentransformationen zurückzuführen sind, nicht mit Hilfe des Energie-Impulstensors beschrieben werden können.

Wir man durch Vergleich von Gl. 12.11 mit Gl. 12.6 erhält, hat der Energie-Impuls Tensor für ein Teilchen die Form

$$\begin{aligned} T^{\mu,\nu}(x^\alpha) &= \int dy^\nu \delta(x^\alpha - y^\alpha) p^\mu c \\ T^{\mu,\nu}(\vec{r}, t) &= \int \underbrace{dt' \frac{dy^\nu(t')}{dt}}_{dy^\nu} \underbrace{\frac{1}{c} \delta(t - t') \delta(\vec{r} - \vec{y}(t'))}_{\delta(x^\alpha - y^\alpha)} p^\mu(t') c \\ &= \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) p^\mu(t) \frac{dy^\nu(t)}{dt} \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors.

#### MECHANISCHER ENERGIE-IMPULSTENSOR

$$T_{mech}^{\mu,\nu}(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) p^\mu(t) \frac{dy^\nu(t)}{dt} \quad (12.12)$$

$$\hat{=} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) \begin{pmatrix} E & E v_x/c & E v_y/c & E v_z/c \\ p_x c & p_x v_x & p_x v_y & p_x v_z \\ p_y c & p_y v_x & p_y v_y & p_y v_z \\ p_z c & p_z v_x & p_z v_y & p_z v_z \end{pmatrix} \quad (12.13)$$

In Analogie mit der Ladungs-Stromdichte eines geladenen Teilchens

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) q \vec{v}(t)$$

können wir  $\rho_E \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) E(t)$  mit der Energiedichte,  $\vec{j}_E \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) E \vec{v}$  mit der Energiestromdichte,  $\rho_{p_i} \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) p_i$  mit der Impulsdichte und  $\vec{j}_{p_i} \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) p_i \vec{v}$  mit der Stromdichte des Impulses  $p_i$  identifizieren. Der Energie-Impuls Tensor hat also die Interpretation

## BEDEUTUNG DES ENERGIE-IMPULSTENSORS

$$T^{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \text{Energie-} & \frac{1}{c} \times \text{Energiestrom-} \\ \text{dichte} & \text{dichte} \\ \hline c \times \text{Impuls-} & \text{Impulsstrom-} \\ \text{dichte} & \text{dichte} \end{pmatrix}$$

Jedes Teilchen trägt also eine bestimmte Energie und einen bestimmten Impuls mit sich herum. Verlässt ein Teilchen ein bestimmtes Volumen, dann geht dem Volumen auch die entsprechende Energie und der entsprechende Impuls verloren. Dies kann durch die entsprechenden Dichten und Stromdichten als

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} d^3r \rho_E(\vec{r}, t) \right) + \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \vec{j}_E(\vec{r}, t) &= \int_{\Omega} d^3r S_E(\vec{r}, t) \\ \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} d^3r \rho_{p_i}(\vec{r}, t) \right) + \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \vec{j}_{p_i}(\vec{r}, t) &= \int_{\Omega} d^3r S_{p_i}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Dabei sind  $S_E$  und  $S_{p_i}$  die **Quellendichten** für Energie und Impuls. Sind Energie und Impuls der Teilchen nicht erhalten, weil sie zum Beispiel mit einem Feld wechselwirken, können sich Energie und Impuls der Teilchen mit der Zeit ändern. Das wird durch die Quellendichte beschrieben.

Beide Gleichungen sind in differentieller Form durch die Gleichung

$$\partial_\nu T^{\mu,\nu} = S^\mu$$

zusammenfassen. Beachte, dass der Index der Viererableitung mit dem zweiten Index des Energie-Impulstensors verknüpft ist. Häufig findet man denselben Ausdruck, aber der Index der Ableitung ist mit dem ersten Index des Energie-Impuls Tensors verknüpft<sup>2</sup>.

### 12.1.2 Beispiel: rein mechanische Wirkung

Betrachten wir nun die Wirkung eines freien Teilchens

$$S[y^\alpha(t)] = -m_0 c^2 \int d\tau$$

Um die Lagrangefunktion zu ermitteln, wandeln wir die Wirkung von einem Eigenzeitintegral in ein Zeitintegral um.

$$\begin{aligned} S[y^\alpha(t)] &= \int dt \underbrace{\left( -m_0 c \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}} \right)}_{\mathcal{L}} \\ \mathcal{L}(y^\alpha, \dot{y}^\alpha, x^\alpha) &= -m_0 c \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Ein Beispiel mit verdrehten Indizes ist im Jackson zu finden[1]. Ich vermute, dass dabei bereits verwendet wurde, dass der Energie-Impulstensor symmetrisch ist. Ich konnte noch nicht beweisen, dass er immer symmetrisch ist, weshalb ich die Symmetrie des Energie-Impulstensors nicht voraussetzen möchte. Bei den Konventionen halte ich mich an das Buch von Felsager[17].

### Viererimpuls

Jetzt bestimmen wir den Viererimpuls nach Gl. 12.7

$$p^\mu = \frac{1}{c} \left[ \underbrace{-m_0 c \frac{\dot{y}_\nu}{\sqrt{\frac{dy_\nu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} \dot{y}^\nu + m_0 c \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}}_{=0} g^{0,\mu} + m_0 c \frac{\dot{y}^\mu}{\sqrt{\frac{dy_\nu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} \right]$$

$$= m_0 c \frac{\dot{y}^\mu}{\sqrt{\frac{dy_\nu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} = \frac{m_0}{\underbrace{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}_{M(\vec{v})}} \dot{y}^\mu$$

Dabei ist  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit des Teilchens und  $M(\vec{v})$  die relativistische Masse. Die Energie ist also

$$E = p^0 c = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{\frac{dy_\nu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}}} = M(\vec{v}) c^2$$

und den Impuls erhält man als die räumlichen Komponenten des kovarianten Impulses

$$\vec{p} = M(\vec{v}) \vec{v}$$

### Energie-Impulstensor

Jetzt bestimmen wir den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu,\nu}(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) p^\mu(t) \frac{dy^\nu}{dt} = \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) m_0 c \frac{\frac{dy^\mu}{dt} \frac{dy^\nu}{dt}}{\sqrt{\frac{dy^\gamma}{dt} \frac{dy^\gamma}{dt}}}$$

$$= M(\vec{v}) \frac{dy^\mu}{dt} \frac{dy^\nu}{dt}$$

$$\hat{=} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) \begin{pmatrix} M(\vec{v}) c^2 & M(\vec{v}) c \vec{v} \\ M(\vec{v}) c \vec{v} & M(\vec{v}) \vec{v} \otimes \vec{v} \end{pmatrix}$$

Beachte, dass der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch ist. Die Energieflussdichte ist also direkt mit der Impulsdichte verknüpft.

### Drehimpulserhaltung

Mit Hilfe des Energie-Impuls Tensors können wir auch die Drehimpulserhaltung nachweisen. Es gilt der Erhaltungssatz

$$\partial_\mu J^\mu = -\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} T^{\nu,\mu} \right) = 0$$

Deshalb ist die entsprechende Noetherladung eine Erhaltungsgröße

Betrachten wir nun Drehungen im Raum<sup>3</sup>

$$\frac{\partial t'}{\partial \epsilon} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \epsilon} = \vec{r} \times \vec{e} \hat{=} \begin{pmatrix} y e_z - z e_y \\ z e_x - x e_z \\ x e_y - y e_x \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup>Eine Drehung im Raum kann allgemein durch

$$\vec{r}' = \mathbf{U} \vec{r}$$

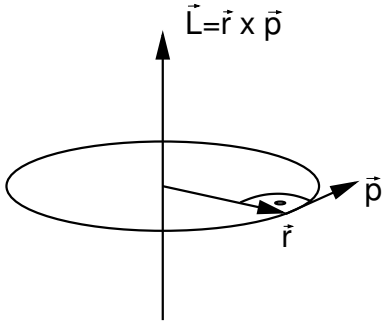
dargestellt werden, wobei  $\mathbf{U}$  eine unitäre Matrix ist, d.h.  $\mathbf{U}^{top} \mathbf{U} = \mathbf{1}$ . Die Änderung der Drehmatrix kann durch  $\mathbf{U}(\epsilon + d\epsilon) = \mathbf{U}(\epsilon) d\mathbf{U}$  beschrieben werden, wobei  $d\mathbf{U} = \mathbf{1} + \mathbf{A} d\epsilon$  eine infinitesimale Drehung ist. Deshalb gilt  $d\mathbf{U} d\mathbf{U}^T = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^T + O(d\epsilon^2) \stackrel{!}{=} \mathbf{1}$ .  $\mathbf{A}$  ist also eine antisymmetrische Matrix, d.h.  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ . Sie kann also, bis auf eine

wobei  $\vec{e}$  die Drehachse ist.

Nun bestimmen wir die entsprechenden Noetherstromdichte

$$\begin{aligned}
 Q &\stackrel{\text{Gl. 12.5}}{=} \int d^3r \frac{1}{c} J^0(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Gl. 12.11}}{=} - \int d^3r \frac{1}{c} \frac{\partial x'_\nu}{\partial \varepsilon} T^{\nu,0} \\
 &= - \int d^3r \frac{1}{c} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{e})}_{\partial \vec{x}' / \partial \varepsilon} \underbrace{\delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) M(\vec{v}) \vec{v} c}_{T^{i,0}} \\
 &= -M(\vec{v}) (\vec{y} \times \vec{e}) \vec{v} \\
 &= \vec{e} \underbrace{(\vec{y} \times M(\vec{v}) \vec{v})}_{\vec{L}} \\
 &= \vec{e} \underbrace{(\vec{y} \times \vec{p})}_{\vec{L}}
 \end{aligned}$$

Dies ist gerade die relativistische Form der Dichte des Drehimpulses  $\vec{L}\vec{e}$  eines Teilchens um die Achse  $\vec{e}$ .



### 12.1.3 Noethertheorem für Felder

Betrachten wir ein System, das nicht nur Teilchen, sondern auch Felder enthält: In diesem Fall ist die Noetherladung des mechanischen Teilsystems nicht mehr erhalten, sondern nur die gesamte Noetherladung von Feldern und Teilchen. Das bedeutet sofort, dass wir den Feldern nun auch eine Energie und einen Impuls zuordnen müssen.

Bei der Bestimmung von Energie und Impuls müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden.

- bei skalaren Feldern ist  $W$  von der Raumtransformation entkoppelt.
- bei Vektorfeldern wie den Eichpotentialen hängt  $W$  direkt von den Raumtransformationen ab. Ein Vektorfeld transformiert wie infinitesimale Distanzvektoren

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu(x, \varepsilon)}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Deshalb transformieren Vektorfelder  $\Phi^\mu$  wie

$$\Phi'^\mu(x'^\mu) = W^\mu(\Phi^\alpha(x^\beta), x^\alpha, \varepsilon) = \frac{\partial x'^\mu(x, \varepsilon)}{\partial x^\nu} \Phi^\nu(x^\mu)$$

Konstante, durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e_z & -e_y \\ e_z & 0 & e_y \\ -e_x & e_z & 0 \end{pmatrix}$$

Für Einzelheiten siehe  $\Phi$ SX:Klassische Mechanik in den Abschnitten über Drehungen.

Damit wird  $W^\mu$  zu

$$\frac{\partial W^\mu}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x'^\mu(x, \varepsilon)}{\partial x^\nu} \Phi^\nu(x^\mu) = \Phi^\nu(x^\mu) \partial_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon}$$

- Tensoren transformieren sich wie das dyadische Produkt von zwei Vektoren.

$$T'^{\mu, \nu}(x'^\beta(x^\alpha)) = \frac{\partial x'^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu(x^\alpha)}{\partial x^\delta} T^{\gamma, \delta}(x^\alpha)$$

Da wir hier keine Tensoren benötigen werde ich das entsprechende  $W^{\mu, \nu}$  nicht weiter ausführen.

## 12.2 Noethertheorem in der Elektrodynamik

In der Elektrodynamik sind die Felder die Eichpotentiale  $A^\mu$ . Als Vektoren transformieren sie wie unter Raum-Zeit-transformationen wie infinitesimale Raum-zeitliche Abstände.

$$dx'^\mu = \left. \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|_{x^\alpha, \varepsilon} dx^\nu$$

Deshalb gilt

$$A'^\mu(x'^\alpha) = \left. \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|_{x^\alpha, \varepsilon} A^\nu(x^\alpha)$$

Die Transformation ist also

$$W^\mu(A^\alpha, x^\alpha, \varepsilon) = \left. \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|_{x^\alpha, \varepsilon} A^\nu$$

sodass

$$\frac{\partial W^\mu}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x^\nu} x'^\mu(x^\alpha, \varepsilon) A^\nu = A^\nu \partial_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \quad (12.14)$$

Wir bestimmen nun die Noetherstromdichte gemäß Gl. 12.4 auf S. 165, indem wir die Lagrange Funktion  $\mathcal{L}$ , Gl. 11.5 auf S. 151, des Pfadanteils der Wirkung der Elektrodynamik und die entsprechende Lagrange Dichte  $\ell$ , Gl. 11.6, des Feldanteils einsetzen. Zunächst berücksichtigen wir den Term  $\frac{\partial W^\mu}{\partial \varepsilon}$  aus Gl. 12.14.

$$\begin{aligned} J^\mu(x^\alpha) &\stackrel{\text{Gl. 12.4, 12.14}}{=} \left[ \int dy^\mu \delta(x^\alpha - y^\alpha) \underbrace{\left( \left[ \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\delta} \dot{y}^\delta \right] g^0_\nu + c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\nu} \right)}_{-p_\mu c} \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \right] \\ &+ \underbrace{\left[ \ell g^\mu_\nu - \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu A^\delta)} \frac{\partial A^\delta}{\partial x^\nu} \right]}_{-T_\nu^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} A^\delta \partial_\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (12.15)$$

Dabei ist  $p^\mu$  der Impuls der Teilchen und  $T^{\nu, \mu}$  der Energie-Impuls Tensor des Feldanteils.

### Impuls der Teilchen

Zunächst bestimmen wir den mechanischen Impuls  $p_\mu$  in Gl. 12.15 aus Gl. 11.5,

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{Gl. 11.5}}{=} -m_0 c \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}} - q A_\mu(y^\alpha) \frac{dy^\mu}{dt}$$

als

$$\begin{aligned} p_\nu &\stackrel{\text{Gl. 12.7}}{=} -\frac{1}{c} \left[ \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\delta} \dot{y}^\delta \right] g^0_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\nu} \\ &\stackrel{\text{Gl. 11.5}}{=} -\frac{1}{c} \underbrace{\left[ -m_0 c \sqrt{\frac{dy_\mu}{dt} \frac{dy^\mu}{dt}} - q A_\mu \frac{dy^\mu}{dt} - \left( -m_0 c \frac{\dot{y}_\delta}{\sqrt{\frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy^\alpha}{dt}}} - q A_\delta \right) \dot{y}^\delta \right]}_{=0} g^0_\nu \\ &\quad - \left[ -m_0 c \frac{\dot{y}_\nu}{\sqrt{\frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy^\alpha}{dt}}} - q A_\nu \right] \\ &= \frac{m_0 c}{\sqrt{\frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy^\alpha}{dt}}} \dot{y}_\nu + q A_\nu = \underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}}_{M(\vec{v})} \dot{y}_\nu + q A_\nu \end{aligned}$$

### Energie und Impuls eines geladenen Teilchens

Die Energie eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld ist also

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\text{Gl. 12.8}}{=} p^0 c = M(\vec{v}) c^2 + q \Phi \\ \vec{p} &\stackrel{\text{Gl. 12.8}}{=} M(\vec{v}) \vec{v} + q \vec{A} \end{aligned}$$

Die Energie als Funktion des Impulses ist gerade die Hamiltonfunktion<sup>4</sup>. Die **Hamiltonfunktion** eines Teilchens ist,<sup>5</sup>

RELATIVISTISCHE HAMILTONFUNKTION EINES TEILCHENS IM E.M. FELD

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = E = \sqrt{m_0^2 c^4 + (\vec{p} - q \vec{A})^2 c^2} + q \Phi \quad (12.16)$$

Diesen Ausdruck erhält man aus der relativistischen Dispersionsrelation einfach durch Ersetzen von  $E \rightarrow E - q c \Phi$  und  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q \vec{A}$ . Dies ist ein allgemeines Prinzip, welches das **Prinzip der minimalen Kopplung** genannt wird.

<sup>4</sup>siehe ΦSX:Klassische Mechanik  
<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \vec{p} - q \vec{A} &= \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) \left(\frac{\vec{p} - q \vec{A}}{m_0 c}\right)^2 = \frac{\vec{v}^2}{c^2} \\ \Rightarrow \quad 1 - \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) \left(\frac{\vec{p} - q \vec{A}}{m_0 c}\right)^2 &= 1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) \left[1 + \left(\frac{\vec{p} - q \vec{A}}{m_0 c}\right)^2\right] \\ \Rightarrow \quad M(\vec{v}) c^2 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p} - q \vec{A}}{m_0 c}\right)^2} = \sqrt{m_0^2 c^4 + (\vec{p} - q \vec{A})^2 c^2} \end{aligned}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall erhält man die Hamiltonfunktion eines nichtrelativistischen Teilchens, nachdem man die Ruheenergie  $m_0 c^2$  abgezogen hat.

#### NICHTRELATIVISTISCHE HAMILTONFUNKTION EINES TEILCHENS IM E.-M. FELD

$$H_{n.r.}(\vec{p}, \vec{r}, t) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m_0} + q\Phi = (H - m_0 c^2) + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Man kann diese Gleichung auch mit dem Prinzip der minimalen Kopplung auch direkt aus der nichtrelativistischen Hamiltonfunktion ohne Felder ableiten.

#### Energie-Impuls Tensor des Feldes

Als nächstes bestimmen wir den Energie-Impuls Tensor  $T^\mu{}_\nu$  des Feldes in Gl. 12.15 aus der Lagrange-Dichte  $\ell$ , Gl. 11.6, der Felder

$$\ell \stackrel{\text{Gl. 11.6}}{=} -\frac{1}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

als

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu &= -\ell g^\mu{}_\nu + \frac{\partial \ell}{\partial(\partial_\mu A^\delta)} \frac{\partial A^\delta}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^\mu{}_\nu - \frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\delta (\partial_\nu A^\delta) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^\mu{}_\nu - F^\mu{}_\delta F_\nu{}^\delta \right] - \frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\delta (\partial^\delta A_\nu) \end{aligned}$$

#### Noetherstrom der Elektrodynamik

Schließlich kümmern wir uns um den letzten Term von Gl. 12.15

$$\frac{\partial \ell}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} A^\delta \partial_\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\nu A^\delta \partial_\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$$

Nun fassen wir die Resultate zum Noetherstrom zusammen indem wir sie wieder in Gl. 12.15 einsetzen.

#### NOETHERSTROMDICHTEN DER ELEKTRODYNAMIK

$$\begin{aligned} J^\mu &= - \int dy^\mu \delta(x^\alpha - y^\alpha) \left( \frac{m_0 c}{\sqrt{\frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy^\alpha}{dt}}} \dot{y}_\nu + q A_\nu \right) c \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^\mu{}_\nu - F^\mu{}_\delta F_\nu{}^\delta \right] - \frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\delta (\partial^\delta A_\nu) \right] \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad - \frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\nu A^\delta \partial_\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \tag{12.17}$$

### 12.2.1 Herstellen der Eichinvarianz

Hier erkennen wir ein Problem: Der Noetherstrom ist in dieser Form nicht eichinvariant und kann daher nicht durch die physikalischen Größen, nämlich die elektrischen und magnetischen Felder ausgedrückt

werden. Das Problem resultiert daraus, dass die Wirkung selbst nicht eichinvariant ist. Man kann das Problem aber reparieren, indem man einen divergenzfreien Vektor abzieht, der ja wieder einer Erhaltungsgröße entspricht.

Betrachten wir dazu die Terme  $\bar{J}^\mu$  in Gl. 12.17, die nicht eichinvariant sind

$$\begin{aligned}\bar{J}^\mu &= - \underbrace{\int dy^\mu \delta(x^\alpha - y^\alpha) q_C A_\nu}_{j^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\delta (\partial^\delta A_\nu) \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\nu A^\delta \partial_\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}\end{aligned}$$

Die Viererstromdichte eines geladenen Teilchens wurde in Gl. 11.16 auf S. 160 bestimmt. Da die Noetherstromdichte für die physikalischen Pfade ausgewertet werden muss, können wir die Maxwellgleichungen  $\partial_\mu F^{\mu,\nu} = \mu_0 j^\nu$  verwenden. Außerdem verwenden wir die Antisymmetrie des Feldstärketensors.

$$\begin{aligned}\mu_0 \bar{J}^\mu &= \underbrace{(\partial^\delta F^\mu{}_\delta) A_\nu}_{-\mu_0 j^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + F^\mu{}_\delta (\partial^\delta A_\nu) \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - F^\mu{}_\nu A^\delta \partial_\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \partial^\delta \left[ F^\mu{}_\delta A_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right] - F^\mu{}_\delta A_\nu \partial^\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - F^\mu{}_\nu A^\delta \partial^\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \underbrace{\partial^\delta \left[ F^\mu{}_\delta A_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right]}_B - \underbrace{\left( F^\mu{}_\delta A_\nu + F^\mu{}_\nu A_\delta \right) \partial^\delta \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}}_C\end{aligned}\quad (12.18)$$

Der erste Term,  $B$ , kann von Noetherstrom abgezogen werden, da seine Divergenz aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors verschwindet. Ein Vektor, dessen Divergenz verschwindet, ist selber eine Erhaltungsgröße. Wir erhalten also wieder eine Erhaltungsgröße, wenn wir einen Term dieser Art zur Noetherstromdichte addieren oder von ihr subtrahieren.

$$\begin{aligned}\underbrace{\partial_\mu \partial_\delta \left[ F^{\mu\delta} A_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right]}_B &\stackrel{\mu \leftrightarrow \delta}{=} \partial_\delta \partial_\mu \left[ F^{\delta\mu} A_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right] \\ &= \partial_\mu \partial_\delta \left[ -F^{\mu\delta} A_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right]\end{aligned}$$

Im ersten Schritt benennen wir nur die Indizes um. Da beide in Summen auftreten, ist ihre Bezeichnung irrelevant. Im nächsten Schritt vertauschen wir die beiden Ableitungen  $\partial_\delta \partial_\mu = \partial_\mu \partial_\delta$ , und wir vertauschen die Indizes des Feldstärketensors mit Hilfe seiner Antisymmetrieeigenschaft  $F^{\delta\mu} = -F^{\mu\delta}$ .

Den zweiten Term  $C$  in Gl. 12.18 können wir nur für Lorentztransformationen wegdiskutieren. Lorentztransformationen haben die Form

$$x'^\mu(x^\alpha, \varepsilon) = \Lambda^\mu{}_\nu(\varepsilon) x^\nu + \varepsilon c^\mu$$

Dabei ist  $c^\mu$  ein beliebiger Verschiebungsvektor und  $\Lambda^{\mu,\nu}$  erfüllt die Gleichung Gl. 10.15 von S. 143,

$$\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

welche die Lorentztransformationen definiert. Aus der Bedingung für die Lorentztransformation folgt eine Beziehung, die wir im folgenden benötigen werden, nämlich

$$\frac{\partial \Lambda^\mu{}_\alpha}{\partial \varepsilon} g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta + \Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \frac{\partial \Lambda^\nu{}_\beta}{\partial \varepsilon} = 0$$



Bei  $\epsilon = 0$  soll die Transformation die Identität sein, d.h.  $\Lambda^\mu{}_\nu(\epsilon = 0) = g^\mu{}_\nu$ . Damit erhalten wir

$$\left. \frac{\partial \Lambda^\mu{}_\alpha}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} g_{\mu\nu} g^\nu{}_\beta + g^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \left. \frac{\partial \Lambda^\nu{}_\beta}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Lambda^\beta{}_\alpha}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{\partial \Lambda^\alpha{}_\beta}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

Nun bilden wir die  $\epsilon$  Ableitung der Transformation

$$\partial_\delta \frac{\partial x'^\mu}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \Lambda^\mu{}_\nu}{\partial \epsilon} \underbrace{\partial_\delta x^\nu}_{g^\nu{}_\delta} = \frac{\partial \Lambda^\mu{}_\nu}{\partial \epsilon} g^\nu{}_\delta = \frac{\partial \Lambda^\mu{}_\delta}{\partial \epsilon}$$

Daraus folgt sofort, dass der Ausdruck C in Gl. 12.18

$$\left( F^\mu{}_\delta A_\nu - F^\mu{}_\nu A_\delta \right) \partial^\delta \left. \frac{\partial x'^\nu}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

für Lorentz-Transformationen verschwindet: Der Term in der Klammer ist symmetrisch bei Vertauschung von  $\delta$  und  $\nu$ , während die Ableitung antisymmetrisch ist, wenn es sich um eine Lorentztransformation handelt.

### Eichinvarianter Noetherstrom

Solange wir uns auf die Lorentztransformationen beschränken, können wir den Noetherstrom eichinvariant darstellen

$$J^\mu - \bar{J}^\mu = - \int dy^\mu \delta(x^\alpha - y^\alpha) \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy^\alpha}{dt}}} \dot{y}_\nu \left. \frac{\partial x'^\nu}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

$$- \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^\mu{}_\nu - F^\mu{}_\delta F_\nu{}^\delta \right] \left. \frac{\partial x'^\nu}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (12.19)$$

### Eichinvarianter Impuls

Wichtig ist zu beachten, dass wir in dieser eichinvarianten Form nicht den kanonischen Impuls, den wir aus der nicht eichinvarianten Wirkung erhalten haben verwenden, sondern den eichinvarianten Impuls, der identisch zum kinetischen Impuls ist.

#### EICHINVARIANTER VIERERIMPULS

$$p^\mu - \bar{p}^\mu = \frac{m_0 c}{\sqrt{\frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy^\alpha}{dt}}} \dot{y}^\mu \quad (12.20)$$

Der eichinvariante Viererimpuls ist mit dem kinetischen Impuls identisch, unterscheidet sich aber von kanonischen Impuls.

### Eichinvarianter Energie-Impulstensor

Der eichinvariante Energie-Impulstensor des Feldes ist

## EICHINVARIANTER ENERGIE-IMPULSTENSOR

$$T^{\mu,\nu} - \bar{T}^{\mu,\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{4} F_{\alpha,\beta} F^{\alpha,\beta} g^{\mu\nu} - F^\mu_\delta F^{\nu\delta} \right]$$

Im Folgenden werden wir die Komponenten durch die elektrischen und magnetischen Felder ausdrücken. Dazu benötigen wir einige Nebenrechnungen, die wir hier ausführen.

$$F^{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Term werden die beiden Tensoren zeilenweise multipliziert

$$\begin{aligned} F^{0,\gamma} F^0_\gamma &= -\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 \\ F^{0,\gamma} F^1_\gamma &= -\frac{1}{c} (E_y B_z - E_z B_y) = -\frac{1}{c} (\vec{E} \times \vec{B})_x \\ F^{1,\gamma} F^0_\gamma &= -\frac{1}{c} (B_z E_y - B_y E_z) = -\frac{1}{c} (\vec{E} \times \vec{B})_x \\ F^{1,\gamma} F^1_\gamma &= \frac{1}{c^2} E_x^2 - B_z^2 - B_y^2 = \frac{1}{c^2} E_x^2 + B_x^2 - \vec{B}^2 \\ F^{1,\gamma} F^2_\gamma &= \frac{1}{c^2} E_x E_y + B_x B_y \end{aligned}$$

Die Spur  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  ergibt

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2\vec{E}^2/c^2 + 2\vec{B}^2$$

Damit erhalten wir den eichinvarianten Energie-Impulstensor.

## EICHINVARIANTER ENERGIE-IMPULSTENSOR

Der eichinvariante Energie-Impuls Tensor der elektromagnetischen Felder ist

$$T^{\alpha,\beta}_{Feld} - \bar{T}^{\alpha,\beta}_{Feld} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} & \frac{1}{c} \vec{E} \times \vec{H} \\ c \vec{D} \times \vec{B} & \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} \mathbf{1} - \vec{E} \otimes \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} \mathbf{1} - \vec{B} \otimes \vec{H} \end{pmatrix}$$

und der eichinvariante Energie-Impulstensor der Teilchen ist

$$\begin{aligned} T^{\alpha,\beta}_{mech} - \bar{T}^{\alpha,\beta}_{mech} &\stackrel{\text{Gl. 12.13}}{=} \frac{1}{c} \int dy^0 \delta(x^\alpha - y^\alpha) (p^\mu - \bar{p}^\mu) \dot{y}^\nu \\ &\stackrel{\text{Gl. 12.20}}{=} \delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) M(\vec{v}) \begin{pmatrix} c^2 & c\vec{v} \\ c\vec{v} & \vec{v} \otimes \vec{v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 12.2.2 Erhaltungssätze

Damit erhalten wir die Erhaltungssätze bezüglich der Lorentztransformationen

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu(x^\alpha) &\stackrel{\text{Gl. 12.3}}{=} 0 \\ J^\mu &\stackrel{\text{Gl. 12.11}}{=} -\frac{\partial x'^\nu}{\partial \epsilon} T^{\nu,\mu}(x^\alpha) \\ \partial_\mu \left[ \frac{\partial x'^\nu}{\partial \epsilon} T^{\nu,\mu}(x^\alpha) \right] &= 0 \end{aligned}$$

wobei

$$T^{\mu,\nu} = T_{mech}^{\mu,\nu} + T_{Feld}^{\mu,\nu} - \bar{T}^{\mu,\nu}$$

#### Energieerhaltungssatz

Damit können wir den freien Feldern die Energie und den Impuls zuordnen. Die Energie ist die Erhaltungsgröße welche aus der Zeittranslationssymmetrie folgt. Wir setzen also  $\frac{\partial x'^0}{\partial \epsilon} = 1$  und für  $j \neq 0$ ,  $\frac{\partial x'^j}{\partial \epsilon} = 0$ . Dies führt auf den Erhaltungssatz

$$\partial_\mu T^{0,\mu} = 0$$

Die Energie ist  $T^{00}$ , also

$$E_{Feld} = \int d^3r \frac{1}{2} (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) \quad (12.21)$$

Die eichinvariante Gesamtenergie des Systems ist damit

$$E_{ges} = M(\vec{v})c^2 + \int d^3r \frac{1}{2} (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H})$$

Die eichinvariante Energie kann nicht verwendet werden, um die Hamiltonfunktion aufzustellen.

Betrachten wir nur einen endlichen Raumbereich, so kann Energie durch den Rand des Bereichs verloren gehen oder hinzugewonnen werden. Der Energiestrom, die Energie, welche pro Zeiteinheit durch eine Fläche  $A$  fließt, ist

$$\frac{dE_{Feld}}{dt} = \int_A d\vec{A} \vec{S}(\vec{r}, t)$$

wobei die Energieflussdichte  $S$  durch den **Poynting Vektor** gegeben ist

**Definition 12.6 POYNTING VEKTOR**

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (12.22)$$

Den Energieerhaltungssatz differentiellen Energieerhaltungssatz kann man auch wie folgt darstellen:

## ENERGIEERHALTUNGSSATZ DES E-M. FELDES

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{j} \vec{E} \quad (12.23)$$

Der erste Term beschreibt die Änderung der Energiedichte des Feldes. Der zweite Term beschreibt die Divergenz der Energiestromdichte, also den Anteil der Energieänderung dadurch, dass Energie aus der Region abfließt, ohne die Energie des Feldes global zu beeinflussen. Der letzte Term, der Quellterm, beschreibt die Energie, welche dem Feld von den Teilchen zugeführt wird.  $\vec{j}$  ist die Stromdichte der Teilchen. Wenn die Teilchen Arbeit verrichten, werden diese verlangsamt. Es gilt also

$$\frac{d}{dt} M(\vec{v}) c^2 \stackrel{\text{Gl. 11.12}}{=} \vec{j} \vec{E}$$

Der Energieerhaltungssatz entspricht  $\partial_\mu T^{0,\mu} = 0$ . Allerdings haben wir den Erhaltungssatz in einen Satz für die Energie und einen für Teilchen aufgeteilt. In Gl. 12.23 ist nur der Feldanteil berücksichtigt. Die Energie des Feldes ist daher nicht erhalten, da Energie aus dem mechanischen System eingetragen werden kann. Dies beschreibt der Quellterm. Ähnlich kann man einen Energieerhaltungssatz des mechanischen Systems aufstellen.

$$\partial_t (\delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) M(\vec{v}) c^2) + \vec{\nabla} \cdot (\delta(\vec{r} - \vec{y}(t)) M(\vec{v}) c^2 \vec{v}) = \vec{j} \vec{E}$$

Der Quellterm beschreibt wiederum den Energieeintrag in das mechanische System aus dem Feld. Wenn wir diese Gleichung zu Gl. 12.23 addieren erhalten wir den gesamten Energieerhaltungssatz für Felder und Teilchen. Die Quellterme heben sich dann weg.

Integrieren wir den Energieerhaltungssatz der Teilchen über das gesamte Volumen, erhalten wir

$$\partial_t M(\vec{v}) c^2 = q \vec{v} \vec{E}$$

**Impulserhaltungssatz**

Den Impulserhaltungssatz erhält man als Folge der Raumtranslationssymmetrie. Der Impuls kann durch den Poyntingvektor ausgedrückt werden

$$\vec{P}_{Feld} = \int d^3r \vec{D} \times \vec{B} = \int d^3r \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

Der Gesamtimpuls des Systems aus Teilchen und Feldern ist

$$\vec{P}_{ges} = M(\vec{v}) \vec{v} + \int d^3r \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

Genau wie die Energie kann Impuls aus einem endlichen Raumbereich heraus oder hineintransportiert werden. Die Impulsstromdichte des Feldes ist durch den Maxwellschen Spannungstensor gegeben.

**Definition 12.7 MAXWELLSCHER SPANNUNGSTENSOR**

$$\mathbf{T} = \vec{E} \otimes \vec{D} - \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} \mathbf{1} + \vec{B} \otimes \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} \mathbf{1} \quad (12.24)$$

In dem wir ohne Beweis zu den Erhaltungssätzen die Änderung der Energie und des Impulses der Teilchen hinzufügen, erhalten wir

## DIFFERENTIELLER IMPULSERHALTUNGSSATZ DES E.-M. FELDES

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \left( \vec{D} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} \mathbf{1} + \vec{B} \otimes \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} \mathbf{1} \right) \\ = - [\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}] \end{aligned}$$

Der Quellenterm ist, bis auf das Vorzeichen, die Lorentzkraft. Kraft ist die Änderung des Impulses. Obwohl dabei im allgemeinen der kanonische Impuls berücksichtigt werden muss, ist hier eichinvariante Impuls zu nehmen, da wir auch den eichinvariant Impuls des Feldes berücksichtigen.

**Drehimpulserhaltungssatz (Heimstudium)**

Der Drehimpulserhaltungssatz kann ganz analog aus dem Erhaltungssatz  $\partial_\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial \epsilon} T^{\nu\mu} = 0$  gewonnen werden, indem wir als Transformation eine Raumdrehung ansetzen.

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

wobei  $\mathbf{U}(\epsilon)$  eine unitäre Matrix ist.

**12.3 Herleitung des Noethertheorems (Heimstudium)****12.4 Beweisidee**

**Editor:** Die Beweisidee ist nicht fertig! Hier werden wir die Prinzipien des Beweises anhand eines einfachen zweidimensionalen Problems darstellen.

Das Prinzip ist es, die Änderung der Wirkung unter einer Symmetrietransformation als Oberflächenintegral darzustellen. Wählt man den Bereich als ein Zeitintervall und den unendlichen Raum, dann fällt das Oberflächenintegral weg. Es verbleiben zwei Raumintegrale, eines zur Anfangszeit und eines zur Endzeit des Zeitintervalls. Da sich die Wirkung unter einer Symmetrietransformation nicht ändert, sind diese Raumintegrale (entgegengesetzt) identisch. Die Größe, welche das Raumintegral bildet, ist demnach zu beiden Zeiten identisch und daher eine Erhaltungsgröße.

**Editor:** Vorsicht mit der Definition der Transformation!

Wir stellen die Wirkung als Integral über eine zweidimensionale Fläche dar.

$$S = \int_{\Omega} d^2x K(\Phi, \vec{\nabla}\Phi, \vec{x})$$

Nun transformieren wir die Wirkung unter einer Koordinatentransformation. Dabei erhalten wir den transformierten Bereich  $\Omega'$ . Die Bereiche können wie folgt aus den in der Abbildung gezeigten Bereichen zusammengesetzt werden.

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 + \Omega_2 \\ \Omega' &= \Omega_1 + \Omega_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S' - S &= \int_{\Omega'} d^2x' K(\Phi', \vec{\nabla}'\Phi', x') - \int_{\Omega} d^2x K(\Phi, \vec{\nabla}\Phi, \vec{x}) \\
&= \int_{\Omega_1} d^2x K(\Phi, \vec{\nabla}\Phi, \vec{x}) \\
&\quad + \int_{\Omega_2} d^2x [K(\Phi, \vec{\nabla}\Phi, \vec{x}) - K(\Phi', \vec{\nabla}'\Phi', x')] \\
&\quad + \int_{\Omega_3} d^2x [-K(\Phi', \vec{\nabla}'\Phi', x')]
\end{aligned} \tag{12.25}$$

## 12.5 Einleitung zum Beweis

Das Noethertheorem geht von einer beliebigen kontinuierlichen Transformation aus. Die Transformation hängt also von einem kontinuierlichen Parameter – wir nennen ihn  $\varepsilon$  – ab.

Ist die Transformation eine Symmetrietransformation des Systems, dann ist die Wirkung invariant bezüglich der Transformation. Es gilt also

$$\frac{dS'}{d\varepsilon} = 0$$

Wir wählen nun einen Raum-Zeit Bereich  $\Omega$  der aus einem Raumbereich  $V$  und einem Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  besteht. Die Ableitung  $\frac{dS}{d\varepsilon}$  lässt sich auf wundersame Weise in ein Oberflächenintegral des Raum-Zeitbereichs, bzw. des Zeitintervalls und weitere Terme umwandeln, die verschwinden, wenn die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllt sind. Das Oberflächenintegral verschwindet also für die physikalischen Pfade und Felder. Dies setzt eine Größe am Anfang des Zeitintervalls mit einer Größe am Ende des Intervalls und einem Fluss durch den Rand des Raumbereichs in Beziehung, woraus wir die Erhaltungsgröße ermitteln. Werten wir das Resultat bei  $\varepsilon = 0$  aus, dann hängt die Erhaltungsgröße von den untransformierten Pfaden und Feldern ab.

Das bedeutet, dass wir

$$\left. \frac{dS'}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

für die physikalischen Pfade und Felder bestimmen müssen.

Im Folgenden leiten wir das Noethertheorem für eine Wirkung in der folgenden Form aus Gl. 11.4 ab:

$$S = \underbrace{\int dt \mathcal{L}(y^\alpha(t), \dot{y}^\alpha(t), \Phi_i(y^\alpha(t)))}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{c} \int d^4x \ell(\Phi_i(x^\alpha), \partial_\beta \Phi_i(x^\alpha), x^\alpha)}_{S_2}$$

Wir nennen den ersten Teil  $S_1$  den Pfadanteil und  $S_2$  den Feldanteil. In der Ableitung werden wir die beiden Terme zunächst getrennt behandeln, und das Resultat am Ende zusammenfügen.

### 12.5.1 $\varepsilon$ -Ableitung des Pfadanteils der Wirkung

Das Noethertheorem für Teilchen wurde bereits in  $\Phi$ SX: Klassische Mechanik abgeleitet. Hier kommt aber noch eine Schwierigkeit hinzu, da die Eichpotentiale durch den Kopplungsterm explizit in die Wirkung für die Teilchen eingehen. Deshalb gehen wir hier nochmals durch die Ableitung, aber nun in ko- und kontravarianter Schreibweise.

Im ersten Schritt wechseln wir die Integrationsvariable von der Zeit  $t$  auf eine abstrakte Größe  $s(t)$ , welche, im Gegensatz von der Zeit, nicht von  $\varepsilon$  abhängt.<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} S_1 &= \int dt \mathcal{L}(y^\mu(t), \frac{dy^\mu(t)}{dt}, \Phi_i(y^\mu(t))) \\ &= \int ds \frac{dt}{ds} \mathcal{L}\left(y^\mu(s), \frac{dy^\mu(s)}{ds} \left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}, \Phi_i(y^\mu(s))\right) \\ &= \int ds \frac{1}{c} \frac{dy^0}{ds} \mathcal{L}\left(y^\mu(s), \frac{dy^\mu(s)}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{dy^0}{ds}\right)^{-1}, \Phi_i(y^\mu(s))\right) \end{aligned}$$

Jetzt transformieren wir die Wirkung, indem wir alle dynamischen Variablen, d.h.  $y^\mu(s)$  und  $\Phi_i(y^\mu)$ , durch die entsprechenden transformierten Größen ersetzen.

$$S'_1 = \int ds \frac{1}{c} \frac{dy'^0}{ds} \mathcal{L}\left(y'^\mu(s), \frac{dy'^\mu(s)}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{dy'^0}{ds}\right)^{-1}, \underbrace{\Phi'_i(y'^\alpha(s), \varepsilon)}_{W_i(\Phi_j(y^\alpha(s)), y^\alpha(s), \varepsilon)}\right)$$

Die transformierten Felder haben an der Position  $x^\mu$  die Werte  $\Phi'_i(x^\mu, \varepsilon)$ . Die transformierten Felder auf dem transformierten Pfad erhalten wir also als  $\Phi'_i(y'^\mu(s), \varepsilon)$ , indem wir den transformierten Pfad einsetzen.

Schließlich bilden wir die  $\varepsilon$ -Ableitung der transformierten Wirkung  $S'_1$ . Anschließend ersetzen wir  $s(t)$ , die ja eine beliebige monotone Funktion von  $t'$  war, durch die untransformierte Zeit, d.h.  $s(t) = t$  und nutzen, dass  $\frac{1}{c} \frac{dy^0}{dt} = 1$ . Beachte dabei, dass  $y'^\mu(s(t)) = y'^\mu(t) = x'^\mu(y^\alpha(t), \varepsilon)$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS'_1}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int ds \left\{ \frac{1}{c} \mathcal{L} \left[ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^0}{ds} \right] + \frac{1}{c} \frac{dy^0}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} \left[ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} y'^\mu \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} \frac{dy^0}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \left[ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^\mu(s)}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{dy'^0}{ds} \right)^{-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} \frac{dy^0}{ds} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \left[ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Phi'_i(y'^\alpha(s), \varepsilon) \right] \right\} \\ &\stackrel{s(t) \stackrel{\text{def}}{=} t}{=} \int dt \left\{ \underbrace{\frac{1}{c} \mathcal{L} \left[ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^0}{dt} \right]}_A + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} \left[ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} y'^\mu \right]}_B \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \left[ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^\mu(t)}{dt} \left( \frac{1}{c} \frac{dy'^0}{dt} \right)^{-1} \right]}_C \right. \\ &\quad \left. + \sum_i \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \left[ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Phi'_i(y'^\alpha(t), \varepsilon) \right]}_D \right\} \end{aligned} \quad (12.26)$$

<sup>6</sup>Wir nutzen, dass  $t(s) = \frac{1}{c} y^0(s)$  und daher  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dy^0}{ds}$ . Es gilt also

$$\begin{aligned} dt &= ds \frac{dt}{ds} = ds \frac{1}{c} \frac{dy^0}{ds} \\ \frac{dy^\mu}{dt} &= \frac{dy^\mu}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dy^\mu}{ds} \left( \frac{dt}{ds} \right)^{-1} = \frac{dy^\mu}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{dy^0}{ds} \right) \end{aligned}$$

Beachte, dass  $y^\mu(s)$  und  $y^\mu(t)$  unterschiedliche Funktionen ihrer Argumente sind. Eigentlich müssten wir für  $y^\mu(s)$  ein neues Symbol  $\bar{y}^\mu(s) \stackrel{\text{def}}{=} y^\mu(t(s))$  einführen. Da aber  $\bar{y}^\mu(s)$  und  $y^\mu(t)$  dieselbe physikalische Größe, nämlich den Pfad, beschreiben, verwenden wir dasselbe Symbol. Man unterscheidet die beiden Funktionen anhand ihres Arguments, d.h.  $s$  oder  $t$ .

Beachte hierbei den Unterschied zwischen  $\frac{dy'}{dt} = \frac{dy'(t')}{dt'} \Big|_{t'(t)} \frac{dt'(t)}{dt}$  und  $\frac{dy'}{dt}$ . Im obigen Ausdruck haben die Lagrange Funktion und ihre Ableitungen die Argumente von

$$\mathcal{L}(y^\mu(t), \dot{y}^\mu(t), \Phi_i(y^\alpha(t)))$$

Im folgenden werden wir die Ausdrücke  $A - D$  in Gl. 12.26 einzeln auswerten, bevor wir sie wieder einsetzen. Dabei verwenden wir die Form des transformierten Pfades

$$\begin{aligned} y'^\mu(t) &= x'^\mu(y^\alpha(t), \varepsilon) \\ \frac{dy'^\mu(t)}{dt} &= \frac{\partial x'^\mu(y^\alpha, \varepsilon)}{\partial x^\nu} \Big|_{y^\alpha(t), \varepsilon} \frac{dy^\nu}{dt} = \dot{y}^\nu \partial_\nu x'^\mu(y^\alpha(t), \varepsilon) \end{aligned}$$

um die  $\varepsilon$ -Ableitungen zu bilden

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} y'^\mu(t) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x'^\mu(y^\alpha(t), \varepsilon) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \Big|_{y^\alpha(t), \varepsilon=0} \quad (12.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^\mu}{dt} &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d}{dt} x'^\mu(y^\alpha(t), \varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{dy^\nu}{dt} \partial_\nu x'^\mu(y^\alpha(t), \varepsilon) \\ &= \dot{y}^\nu \partial_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \Big|_{y^\alpha(t), \varepsilon=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \Big|_{y^\alpha(t), \varepsilon=0} \end{aligned} \quad (12.28)$$

Im Folgenden werden wir die Argumente der  $\varepsilon$ -Ableitungen von  $x'^\mu$  weglassen. Dies kann nicht mehr zu Missverständnissen führen, da es offensichtlich ist, dass der Wert entlang dem untransformierten Pfad  $y^\alpha(t)$  und bei  $\varepsilon = 0$  ausgewertet wird.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns den Termen  $A - D$  in Gl. 12.26 zu.

• **Term A:**

$$A \stackrel{\text{Gl. 12.26}}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^0}{dt} \stackrel{\text{Gl. 12.28}}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon}$$

• **Term B:**

$$B \stackrel{\text{Gl. 12.26}}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} y'^\mu \stackrel{\text{Gl. 12.27}}{=} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon}$$

• **Term C:**

$$\begin{aligned} C &\stackrel{\text{Gl. 12.26}}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^\mu}{dt} \left( \frac{1}{c} \frac{dy'^0}{dt} \right)^{-1} \\ &= \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^\mu}{dt} \right) \underbrace{\left( \frac{1}{c} \frac{dy'^0}{dt} \right)^{-1}}_{=1} - \frac{dy'^\mu}{dt} \underbrace{\left( \frac{1}{c} \frac{dy'^0}{dt} \right)^{-2}}_{=1} \frac{1}{c} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{dy'^0}{dt} \right) \\ &\stackrel{\text{Gl. 12.28}}{=} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \right) - \dot{y}^\mu \frac{1}{c} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon} \right) \end{aligned}$$

• **Term D:**

$$D \stackrel{\text{Gl. 12.26}}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Phi'_i(y'^\alpha(t), \varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} W_i(\Phi(y^\alpha(s)), y^\alpha(s), \varepsilon) = \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon}$$



Wir setzen die Terme  $A - D$  in die  $\varepsilon$ -Ableitung der Wirkung Gl. 12.26 ein

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS'_1}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int dt \left\{ \underbrace{\frac{1}{c} \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon} \right]}_A + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} \left[ \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \right]}_B \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \right) - \dot{y}^\mu \frac{1}{c} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon} \right) \right]}_C + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \left[ \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \right] \right\} \end{aligned}$$

Nun führen wir eine partielle Integration durch, um die Zeitableitung von der  $\varepsilon$ -Ableitung der Transformation abzuwälzen.

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS'_1}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int dt \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\frac{1}{c} \mathcal{L} \frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon}}_A - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \dot{y}^\mu \frac{1}{c} \frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon}}_C \right\} \\ &\quad + \int dt \left\{ \underbrace{-\frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \mathcal{L}}_A + \underbrace{\frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \dot{y}^\mu \right) - \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu}}_C \right\} \\ &\quad + \int dt \left\{ \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon}}_D + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon}}_B \right\} \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt die Zeitableitung der beiden ersten Terme in der mittleren Zeile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \dot{y}^\mu \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\mu} \dot{y}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{y}^\mu} \ddot{y}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \frac{d}{dt} \Phi(y^\alpha(t)) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \right) \dot{y}^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{y}^\mu} \ddot{y}^\mu \\ &= \left[ \frac{\mathcal{L}}{\partial y^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \partial_\mu \Phi \right] \dot{y}^\mu \end{aligned}$$

Der Term in der eckigen Klammer verschwindet, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind, was später wichtig sein wird. Der letzte Term der obigen Gleichung kann ähnlich mit dem Term  $B$  kombiniert werden. Wir stellen den ersten Term noch ein wenig um, wobei wir die Identität für einen beliebigen Vektor  $c^0 = g^0_\nu c^\nu$  verwenden.

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS'_1}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int dt \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\left( \frac{1}{c} \left[ \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\nu} \dot{y}^\nu \right] g^0_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \right)}_{=:-p_\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \right\} \\ &\quad + \int dt \left\{ \left[ \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon} \frac{1}{c} \dot{y}^\mu \right] \underbrace{\left[ \frac{\mathcal{L}}{\partial y^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \partial_\mu \Phi \right]}_{ELG} \right\} \\ &\quad + \underbrace{\int dt \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \left\{ \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \partial_\mu \Phi \right\}}_X \end{aligned} \tag{12.29}$$

Dieses Zwischenresultat muss noch mit dem Beitrag des zweiten Teils der Wirkung kombiniert werden.

### 12.5.2 $\varepsilon$ -Ableitung des Feldanteils der Wirkung

Wir bestimmen nun die  $\varepsilon$ -Ableitung des Feld-Anteils der transformierten Wirkung

$$S'_2 = S_2[\Phi'_i(x'^\nu), \partial'_\nu \Phi'_i(x'^\nu), x'^\nu]$$

Bei der  $\varepsilon$ -Ableitung der Wirkung  $S'_2$  ist zu beachten, dass bei der Transformation auch das Integrationsvolumen  $\Omega$  transformiert wird. Wir führen also zunächst eine Koordinatentransformation durch, damit die Integration über das untransformierte Volumen  $\Omega$  anstelle dem transformierten Volumen  $\Omega'$  ausgeführt werden kann. Anschließend verwenden wir die Produkt und Kettenregel, um die  $\varepsilon$ -Ableitung auszuführen. Dabei beachten wir, dass die Jakobi determinante bei  $\varepsilon = 0$  gerade eins ergibt, da gefordert wurde, dass die Abbildung für  $\varepsilon = 0$  gerade die Identität ist.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dS'_2}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{1}{c} \int_{\Omega'} d^4 x' \ell(\Phi'_i(x'^\alpha), \partial'_\nu \Phi'_i(x'^\alpha), x'^\alpha) \\
&= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \det \left[ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right] \ell(\Phi'_i(x'^\alpha(x^\beta)), \partial'_\nu \Phi'_i(x'^\alpha(x^\beta))) \right\} \\
&= \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \underbrace{\ell \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det \left[ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right]}_A + \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \underbrace{\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Phi'_i(x'^\alpha(x^\beta))}_B \right. \\
&\quad \left. + \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \underbrace{\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left( \partial'_\mu \Phi'_i(x'^\alpha(x^\beta)) \right)}_C + \frac{\partial \ell}{\partial x^\mu} \underbrace{\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} x'^\mu(x^\beta)}_D \right\} \quad (12.30)
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile sind die Argumente der Lagrange Funktion und Ihrer Ableitungen gerade die untransformierten Felder, deren untransformierte Ableitungen und die untransformierten Koordinaten.

Im Folgenden werden wir die einzelnen  $\varepsilon$ -Ableitungen bestimmen.

- **Term A:** Wir beginnen mit ein paar vorbereitenden Bemerkungen für die unten folgende Ableitung.

Wir drücken zunächst die Determinante durch den Levi-Civita Tensor  $\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$  aus. Es gilt

**Editor: Check if there is a difference if the indices 0,1,2,3 are co or contravariant!!!, Below we use a mixed co and contravariant tensor.**

$$\det[A^{\mu,\nu}] = \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} A^{\alpha,0} A^{\beta,1} A^{\gamma,2} A^{\delta,3}$$

Der Levi-Civita Tensor hat den Wert  $\epsilon_{0,1,2,3} = 1$  und wechselt sein Vorzeichen mit jeder Vertauschung von zwei Indizes. Sind zwei Indizes identisch, verschwindet das Element des Levi-Civita Tensors. Wir verwenden darüber hinaus, dass für  $\varepsilon = 0$

$$\partial x'^\mu / \partial x^\nu \stackrel{\varepsilon=0}{=} \partial x^\mu / \partial x^\nu = g^\mu_\nu$$

Der metrische Tensor mit einem kovarianten und einem kontravarianten Index entspricht aber gerade der Einheitsmatrix. Damit können wir die Summe über die Indizes gemäß dem Beispiel

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} g^\beta_1 g^\delta_2 g^\delta_3 = \epsilon_{\alpha,1,2,3} = \delta_{\alpha,0}$$

kontrahieren.

Nach diesen Vorbemerkungen werten wir den Term  $A$  aus:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \det \left[ \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right] \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^0} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^1} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^2} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^3} \\
 &= \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \left\{ \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^0} \right) g^{\beta}_1 g^{\gamma}_2 g^{\delta}_3 + g^{\alpha}_0 \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^1} \right) g^{\gamma}_2 g^{\delta}_3 \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha}_0 g^{\beta}_1 \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^2} \right) g^{\delta}_3 + g^{\alpha}_0 g^{\beta}_1 g^{\gamma}_2 \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^3} \right) \right\} \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} + \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} + \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \right\} \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \partial_{\mu} x'^{\mu} = \partial_{\mu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned}$$

• **Term  $B$ :**

$$B = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Phi'_i(x'(x)) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} W_i(\Phi_j, x^{\nu}, \varepsilon) = \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$$

• **Term  $C$ :**

$$\Phi'_i(x'^{\nu}(x^{\nu}, \varepsilon), \varepsilon) = W_i(\Phi_j(x^{\nu}), x^{\nu}, \varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[ \frac{d\Phi'_i}{dx'^{\mu}} \right] \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[ \frac{d\Phi'_i}{dx^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \right] \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[ \left( \frac{d}{dx^{\nu}} W_i(\Phi_j(x^{\nu}), x^{\nu}) \right) \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \right] \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[ \left( \sum_j \frac{\partial W_i}{\partial \Phi_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial W_i}{\partial x_{\nu}} \right) \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \right] \\
 &= \left( \sum_j \frac{\partial^2 W_i}{\partial \varepsilon \partial \Phi_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial \varepsilon \partial x_{\nu}} \right) \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} + \left( \sum_j \frac{\partial W_i}{\partial \Phi_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial W_i}{\partial x_{\nu}} \right) \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \right] \\
 &= \underbrace{\left( \sum_j \frac{\partial^2 W_i}{\partial \varepsilon \partial \Phi_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial \varepsilon \partial x^{\nu}} \right)}_{\frac{d}{dx^{\nu}} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon}} \underbrace{\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}}_{g^{\nu}_{\mu}} + \left( \sum_j \frac{\partial W_i}{\partial \Phi_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial W_i}{\partial x_{\nu}} \right) \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left[ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \right]
 \end{aligned}$$

Hier verwenden wir

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = g^\nu_\mu \\
 \Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \right) &= \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \right) \underbrace{\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \Big|_{\varepsilon=0}}_{g^\gamma_\mu} + \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \Big|_{\varepsilon=0}}_{g^\nu_\gamma} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\mu} \right) \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} + \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = 0 \\
 \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} &= - \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \\
 &= - \partial_\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$C = \underbrace{\partial_\mu}_{\frac{d}{dx^\mu}} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu} \partial_\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$$

• **Term D:**

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$$

Diese Resultate können wir jetzt in Gl. 12.30 einsetzen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{dS'_2}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x \left\{ \underbrace{\ell \partial_\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}}_A + \sum_i \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}}_B \right. \\
 &\quad \left. + \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \left( \underbrace{\partial_\mu \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon}}_{C1} - \underbrace{\frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu} \partial_\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}}_{C2} \right) + \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}}_D \right\}
 \end{aligned}$$

Nun wälzen wir die Raumableitungen von der Transformation ab.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS'_2}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left\{ \underbrace{\left[ \ell g^\mu_\nu \right]}_A - \underbrace{\sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu}}_{C2} \right\} \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon}}_{C1} \\
 &\quad + \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \left\{ - \partial_\mu \underbrace{\left[ \ell g^\mu_\nu \right]}_A - \underbrace{\sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu}}_{C2} \right\} + \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial x^\nu}}_D \\
 &\quad + \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x \sum_i \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \left\{ - \underbrace{\partial_\mu \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)}}_{C1} + \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i}}_B \right\}
 \end{aligned}$$

Nun müssen wir die Ableitungen der Terme A, C2 im Term E ausführen

$$\begin{aligned}
 E &= -\partial_\mu \left[ \underbrace{\ell g^\mu{}_\nu}_A - \underbrace{\sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu}}_{C2} \right] + \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial x^\nu}}_D \\
 &= -\underbrace{\sum_i \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \partial_\nu \Phi_i - \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\alpha \Phi_i)} \partial_\nu \partial_\alpha \Phi_i - \frac{\partial \ell}{\partial x^\nu}}_A \\
 &\quad + \underbrace{\left( \partial_\mu \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu} + \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \Phi_i}_{C2} + \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial x^\nu}}_D \\
 &= - \left( \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right) \partial_\nu \Phi_i
 \end{aligned}$$

Wir setzen das Resultat in die Ableitung der Wirkung ein. Schließlich erweitern wir den letzten Term, sodass er den Euler-Lagrange Gleichungen entspricht, die verschwinden, wenn wir den physikalischen Pfad einsetzen. Im allerletzten Term kontrahieren wir das Raum-Zeit-Integral mit Hilfe der  $\delta$ -Funktion zu einem Zeitintegral.

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dS'_2}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left\{ \underbrace{\left[ \ell g^\mu{}_\nu - \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu} \right]}_{C2} \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \right\} \bigg|_{\varepsilon=0} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon}}_{C1} \\
 &\quad + \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x \left[ \sum_i \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \partial_\nu \Phi_i \right] \left( \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right) \\
 &= \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left\{ \underbrace{\left[ \ell g^\mu{}_\nu - \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu} \right]}_{C2} \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \right\} \bigg|_{\varepsilon=0} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon}}_{C1} \\
 &\quad + \frac{1}{c} \int_\Omega d^4x \left[ \sum_i \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \partial_\nu \Phi_i \right] \\
 &\quad \times \underbrace{\left( \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} + \int dt \, c \, \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \right)}_{ELG} \\
 &\quad - \underbrace{\int dt \left[ \sum_i \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \partial_\nu \Phi_i \right]_{y^\alpha(t), \varepsilon=0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \bigg|_{y^\alpha(t), \dot{y}^\alpha(t), A^\beta(y^\alpha(t))}}_X \tag{12.31}
 \end{aligned}$$

### 12.5.3 Beides zusammen...

Nun haben wir die  $\varepsilon$ -Ableitung der Wirkung in der endgültigen Form. Wir bringen die beiden Beiträge, den Pfadanteil aus Gl. 12.29 und den Feldanteil aus Gl. 12.31, zusammen

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{dS_1}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \left. \frac{dS_2}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

und werten den Ausdruck für die physikalischen Teilchenbahnen und Felder, welche die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen, aus. Dadurch fallen die mit *ELG* gekennzeichneten Beiträge heraus. Zwei

weitere Terme, durch  $X$  gekennzeichnet heben sich gegenseitig in den von  $S_1$  und  $S_2$  herrührenden Beiträgen weg. Es verbleiben

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\left( \frac{1}{c} \left[ \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\nu} \dot{y}^\nu \right] g^0_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \right)}_{A(t)} \frac{\partial x'^\mu}{\partial \varepsilon} \right\} \\ &+ \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left\{ \left[ \ell g^\mu_\nu - \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu} \right] \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &+ \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \end{aligned} \quad (12.32)$$

Das Resultat verschwindet, wenn die Transformation  $x'^\mu(x^\alpha, \varepsilon)$ ,  $W_i(\Phi_j, x^\alpha, \varepsilon)$  eine Symmetrietransformation des Systems ist.

Nun wollen wir den ersten Term von Gl. 12.32 in ein Integral über das Raum-Zeit Volumen umwandeln, damit alles durch ein Raum-Zeitintegral schreiben können. Der erste Term hat die Struktur

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} A(t) &= \int_{\Omega} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} dt \underbrace{\delta(x^\alpha - y^\alpha(t))}_{\mathcal{B}} \frac{d}{dt} A(t) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ \frac{d}{dt} (\delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) A(t)) - A(t) \frac{d}{dt} \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \right] \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} d^4x \left[ \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) A(t) \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} \\ &\quad - \int_{\Omega} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} dt A(t) (\partial_\mu \delta(x^\alpha - y^\alpha(t))) \left( -\frac{dy^\mu}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left( c \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) A(t) \frac{dy^\mu}{dt} \right) \end{aligned}$$

Damit kann man die  $\varepsilon$ -Ableitung der Wirkung am physikalischen Pfad auf die folgende Form bringen.

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (12.33)$$

mit der Noetherstromdichte

$$\begin{aligned} J^\mu &\stackrel{\text{def}}{=} c \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dt \delta(x^\alpha - y^\alpha(t)) \dot{y}^\mu \left( \frac{1}{c} \left[ \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\delta} \dot{y}^\delta \right] g^0_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\nu} \right) \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \right] \\ &+ \left[ \ell g^\mu_\nu - \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu} \right] \frac{\partial x'^\nu}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (12.34)$$

Dies ist das gesuchte Resultat der Herleitung des Noethertheorems.

Wir rekapitulieren nochmals die Schritte in der Ableitung des Noethertheorems

1. Die transformierte Wirkung wird nach  $\varepsilon$  abgeleitet. Per Kettenregel werden die  $\varepsilon$ -Ableitungen bis zur Transformation  $x'(x, \varepsilon)$  bzw.  $W_i(\Phi, x, \varepsilon)$  durchgeleitet.
2. Die Gleichungen werden vereinfacht, indem wir  $\varepsilon = 0$  setzen.
3. Die Zeitableitungen, bzw der Raum-Zeit Gradient wird mit Hilfe der Produktregel von den Transformationen abgewälzt.

4. Die Terme, die nicht Integrale totaler Zeitableitungen, bzw. Raum-Zeit-Integrale einer Raum-Zeit Divergenz sind, werden so geordnet, dass sie Terme enthalten, die verschwinden, wenn die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllt sind.
5. Die verbleibenden Terme werden mittels Gauß-Theorem, bzw. Integration auf die Oberfläche des Raum-Zeit Bereichs  $\Omega$  abgebildet.
6. Wir wählen einen Raum-Zeit-Bereich, der aus dem ganzen Raum und einem beliebigen Zeitintervall gebildet wird. Da der Unterschied der Oberflächenterme an den Grenzen des Zeitintervalls verschwindet, ist das Raumintegral unabhängig von der Zeit.

## 12.6 Ein weiterer Beweis für das Noethertheorem

**Editor: Momentan nur für Felder. Erster Durchgang. Kontrollieren!**

Da das Noethertheorem nicht ganz trivial ist, wollen wir uns nicht zusätzlich mit der kovarianten Schreibweise belasten, und arbeiten in der regulären Vektorschreibweise. Zusätzlich beschränken wir uns zunächst ausschließlich auf Felder, um den Beweis nicht zu überfrachten.

Im folgenden definieren wir die Wirkung für Felder, welche die Grundlage für den Beweis liefert. Dabei unterscheiden wir zunächst nicht zwischen Raum- und Zeitkoordinaten, um die Ausdrücke einfach zu halten. Anschließend bestimmen wir die Euler-Lagrange Gleichungen für diese Wirkung. Diese benötigen wir im Lauf des Beweises. Dann legen wir die Notation für die Symmetrietransformationen fest, bevor wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen.

Im Beweis des Noethertheorems wird die Wirkung einer Symmetrietransformation unterworfen, die von einem kontinuierlichen Parameter abhängt. Zum Beispiel wäre bei einer Drehung der Drehwinkel der entsprechende kontinuierliche Parameter. Da die Wirkung invariant ist, verschwindet der Ausdruck für die Ableitung der Wirkung nach dem Parameter der Transformation. Der Knackpunkt beim Noethertheorem ist, dass der resultierende Ausdruck, wie in Abb. 12.6 dargestellt, in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden kann. Dies ist möglich, weil eine Änderung der Felder im Innern des Bereichs die Wirkung aufgrund des Variationsprinzips unverändert läßt.

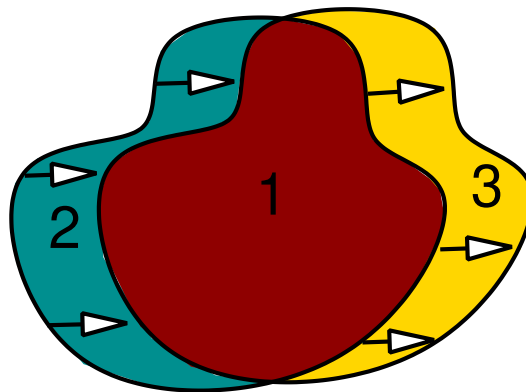
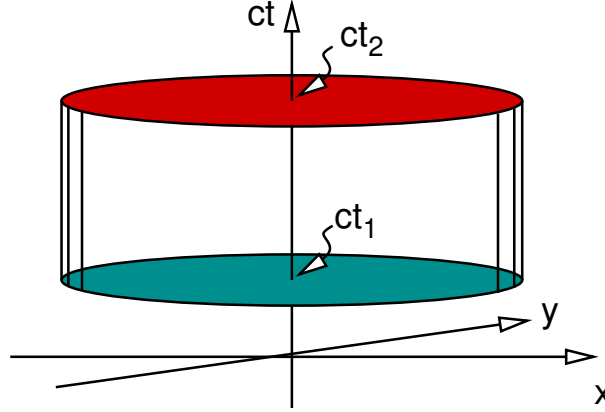


Abb. 12.1: Eine Transformation des Raumbereichs der Wirkung führt zu Randtermen 2 und 3, welche zu einem Oberflächenintegral werden. Im Bereich 1 verschwindet die Variation der Wirkung aufgrund des Wirkungsprinzips bis auf ein weiteres Oberflächenintegral. Das ist das Prinzip des Noethertheorems, welches die Änderung der Wirkung unter einer Symmetrietransformation auf ein reines Oberflächenintegral abbildet.

Nun betrachten wir einen Integrationsbereich für die Wirkung, der räumlich unendlich ausgedehnt ist<sup>7</sup> und in der Zeit ein gegebenes Intervall abdeckt. Wenn der Integrand des Oberflächenintegrals

<sup>7</sup>Im Beweis betrachten wir den Bereich allerdings zunächst als endlich. Der Grenzfall kann im Anschluss an den

im Unendlichen (bzgl. der Raumkoordinaten) verschwindet, dann tragen nur die verbleibenden Raumintegral am Anfang und am Ende des Zeitintervalls bei. Daraus ergibt sich ein Ausdruck der zu Beginn und am Ende des Intervalls identisch ist, also eine Erhaltungsgröße.



### Die Wirkung

Wir beginnen mit einer Wirkung der Form

$$S[\Phi_i(\vec{r})] = \int d^4r \theta_\Omega(\vec{r}) \ell(\Phi_i, \vec{\nabla}\Phi, \vec{x})$$

Der vierdimensionale Vektor  $\vec{r}$  schließt Raum und Zeitkoordinaten ein. Die Wirkung wird für einen vorgegebenen Raum-Zeit Bereich  $\Omega$  bestimmt, den wir über die Stufenfunktion  $\theta_\Omega$  berücksichtigen. Die Stufenfunktion hat in  $\Omega$  den Wert 1 und verschwindet außerhalb von  $\Omega$ . Das heisst

$$\theta_\Omega(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{r} \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### Euler-Lagrange Gleichungen

Für den Beweis werden wir später noch die Euler-Lagrange Gleichungen für die Felder benötigen. Wir leiten diese nochmals her, was uns mit der obigen Form der Wirkung etwas vertrauter macht.

$$\begin{aligned} \delta S &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \int_\Omega d^4r \sum_i \left[ \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i(\vec{r}) + \sum_k \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i)} \partial_k \delta \Phi_i(\vec{r}) \right] \\ &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} \int_\Omega d^4r \sum_i \left[ \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i(\vec{r}) - \delta \Phi_i(\vec{r}) \sum_k \partial_k \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i)} \right] \\ &\quad + \int_\Omega d^4r \sum_k \partial_k \left[ \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i)} \delta \Phi_i(\vec{r}) \right] \\ &\stackrel{\text{Gau}}{=} \int_\Omega d^4r \sum_i \delta \Phi_i(\vec{r}) \left[ \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i)} \right] \\ &\quad + \underbrace{\sum_k \oint_{\partial\Omega} dA_k \left[ \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i)} \delta \Phi_i(\vec{r}) \right]}_{=0 \text{ weil } \delta\Phi=0 \text{ auf } \partial\Omega} \\ \frac{\delta S}{\delta \Phi_i(\vec{r})} &= \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i)} \end{aligned}$$

Beweis vollzogen werden.



Die Forderung für die physikalischen Felder ist, dass die Variation der Wirkung verschwindet. Deshalb erfüllen sie die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i)} = 0 \quad (12.35)$$

### Transformationsgleichungen

Nun betrachten wir eine kontinuierliche Transformation der Koordinaten und der Felder

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r}'(\vec{r}, \varepsilon) \\ \Phi_i(\vec{r}) &\rightarrow \Phi'_i(\vec{r}, \varepsilon) \end{aligned}$$

Das transformierte Feld  $\Phi'_i(\vec{r}, \varepsilon)$  steht mit  $W_i$  in der folgenden Beziehung.

$$\Phi'_i(\vec{r}'(\vec{r}, \varepsilon), \varepsilon) = W_i(\Phi_k(\vec{r}), \vec{r}, \varepsilon) \quad (12.36)$$

Zusätzlich zu den Feldern müssen wir auch die Stufenfunktion transformieren, da natürlich auch der Integrationsbereich  $\Omega$  mittransformiert werden muss. Der transformierte Bereich ist  $\Omega'$  und die transformierte Stufenfunktion bezeichnen wir mit  $\theta_{\Omega'}(\vec{r}, \varepsilon)$ . Die  $\varepsilon$ -Abhängigkeit des Bereichs haben wir in die Argumentliste aufgenommen. Die transformierte Stufenfunktion ist durch die folgende Beziehung mit der nicht-transformierten Stufenfunktion verknüpft, die, nicht überraschend, eine starke Ähnlichkeit mit der Transformationsgleichung der Felder aufweist.

$$\theta_{\Omega'}(\vec{r}'(\vec{r}, \varepsilon), \varepsilon) = \theta_{\Omega}(\vec{r}) \quad (12.37)$$

### Transformierte Wirkung

Die transformierte Wirkung erhält man, indem man die transformierten Felder und den transformierten Integrationsbereich in die sonst unveränderte Wirkung einsetzt. Das bedeutet, dass die Lagrangedichte als Funktion ihrer Argumente vor und nach der Transformation immer noch dieselbe Funktion ist. Es werden aber die transformierten Felder eingesetzt.

$$S[\Phi'_i(x^\alpha), \varepsilon] = \int_{\infty} d^4 r \theta_{\Omega'}(\vec{r}, \varepsilon) \ell(\Phi'_i(\vec{r}), \vec{\nabla} \Phi'_i(\vec{r}), \vec{r})$$

Das Integral läuft über den gesamten Raum und über alle Zeiten. Ein endlicher Raum-Zeitbereich wird durch die Stufenfunktion herausgeschnitten.

Ist die Transformation eine Symmetrietransformation, dann bleibt die Wirkung unter der Transformation unverändert. Dies ist gerade die Definition einer Symmetrietransformation. Deshalb verschwindet die  $\varepsilon$ -Ableitung der Wirkung, was die Grundlage des Noethertheorems darstellt.

Nun bilden wir die Ableitung der transformierten Wirkung bei  $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS[\Phi_i(x^\alpha), \varepsilon]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int d^4 r \left. \frac{\partial \theta_{\Omega'}(\vec{r}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \ell(\Phi_i, \vec{\nabla} \Phi_i, \vec{r}) \\ &+ \theta_{\Omega}(\vec{r}) \left[ \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} + \sum_i \sum_k \overbrace{\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))}}^{A_k} \underbrace{\frac{\partial (\partial_k \Phi'_i(\vec{r}))}{\partial \varepsilon}}_{\partial_k \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}} \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

Jetzt führen wir eine partielle Integration durch...

$$\sum_k A_k \partial_k B = \sum_k \partial_k (A_k B) - \sum_k B \partial_k A_k$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \int d^4 r \left. \frac{\partial \theta_{\Omega'}(\vec{r}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \ell(\Phi_i, \vec{\nabla} \Phi_i, \vec{r}) \\ & + \theta_{\Omega}(\vec{r}) \left[ \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} - \sum_i \sum_k \overbrace{\frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon}}^{B_k} \bigg|_{\varepsilon=0} \partial_k \overbrace{\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))}}^A \\ & + \theta_{\Omega}(\vec{r}) \sum_k \partial_k \left[ \sum_i \overbrace{\frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon}}^B \overbrace{\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))}}^{A_k} \right]_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (12.38)$$

Als nächstes betrachten wir die  $\varepsilon$ -Ableitung der Stufenfunktion. Die Stufenfunktion für den verschobenen Bereich  $\Omega'$  ist durch Gl. 12.37 definiert. Wir leiten die Definitionsgleichung Gl. 12.37 direkt nach  $\varepsilon$  ab, was uns die punktweise (partielle) Ableitung von  $\theta_{\Omega'}(\vec{r}, \varepsilon)$  liefert

$$\left. \frac{\partial \theta_{\Omega'}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \stackrel{\text{Gl. 12.37}}{=} - \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \vec{\nabla} \theta_{\Omega}(\vec{r}) \quad (12.39)$$

Bei der Ableitung haben wir einfach ignoriert, dass die Stufenfunktion nicht differenzierbar ist. Deshalb ist der resultierende Ausdruck auch keine reguläre Funktion sondern eine Distribution. Den geschlossenen Ausdruck für diese Ableitung werden wir später getrennt bestimmen. Momentan gehen wir so vor, dass wir die Stufenfunktion in Gedanken durch eine differenzierbare, also ausgeschmierte, Funktion ersetzen. Damit können wir zunächst rechnen. Am Ende denken wir uns die Stufenfunktion als Glied einer Folge, die gegen die Stufenfunktion konvergiert und bestimmen das Endresultat im entsprechenden Grenzfall.

Nun setzen wir das Resultat Gl. 12.39 in Gl. 12.38 ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{dS[\Phi_i(x^\alpha), \varepsilon]}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} &= \int d^4 r \left\{ \underbrace{- \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (\vec{\nabla} \theta_{\Omega}(\vec{r})) \ell(\Phi_i, \vec{\nabla} \Phi_i, \vec{r})}_D \right. \\ & + \theta_{\Omega}(\vec{r}) \left[ \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} - \sum_i \sum_k \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \partial_k \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))} \\ & \left. + \theta_{\Omega}(\vec{r}) \sum_k \partial_k \left[ \sum_i \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))} \right\} \end{aligned}$$

Durch eine partielle Integration wälzen den Gradienten im Term  $D$  von der Stufenfunktion ab. Dazu führen wir, der Einfachheit halber, die Funktion  $\vec{f}(\vec{r}) = -\ell(\Phi_i, \vec{\nabla} \Phi, \vec{r}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon}$  ein. Der Term hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \int_{\infty} d^4 r \overbrace{\vec{f}(\vec{r}) \vec{\nabla} \theta_{\Omega}(\vec{r})}^D &= \int_{\infty} d^4 r \vec{\nabla} [\vec{f}(\vec{r}) \theta_{\Omega}(\vec{r})] - \int_{\infty} d^4 r \theta_{\Omega}(\vec{r}) \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) \\ &\stackrel{\text{Gau}}{=} \underbrace{\oint_{\partial \infty} d\vec{A} [\vec{f}(\vec{r}) \theta_{\Omega}(\vec{r})]}_{=0} - \int_{\infty} d^4 r \theta_{\Omega}(\vec{r}) \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Den dabei entstehenden kompletten Divergenzterm wandeln wir mittels Gauß-Theorem in ein Oberflächenintegral über den Rand  $\partial_\infty$  des Universums um. Dieses verschwindet, da die Stufenfunktion  $\theta_\Omega(\vec{r})$  im Unendlichen verschwindet, solange der Bereich  $\Omega$  endlich ist.

Schließlich ordnen wir die Terme ein wenig um. Mit  $\int_\infty d^4 r \theta_\Omega \dots = \int_\Omega d^4 r \dots$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS[\Phi_i(x^\alpha), \varepsilon]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_\Omega d^4 r \sum_k \partial_k \left[ \left. \frac{\partial r'_k}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \ell(\Phi_i, \vec{\nabla} \Phi_i, \vec{r}) + \sum_i \left. \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))} \right] \\ &\quad + \int_\Omega d^4 r \sum_i \left. \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \underbrace{\left[ \frac{\partial \ell}{\partial \Phi_i} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))} \right]}_{\text{ELG (siehe Gl. 12.35)}} \end{aligned}$$

Wir haben hier die Noetherstromdichte  $J_k$  definiert. Wenn die Transformation, die durch  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'(\vec{r}, \varepsilon)$  und  $\Phi_i(\vec{r}) \rightarrow \Phi'_i(\vec{r}, \varepsilon)$  definiert ist, eine Symmetrietransformation ist, dann ist die Wirkung invariant unter der Transformation und ihre  $\varepsilon$ -Ableitung verschwindet. Die Divergenz der Noetherstromdichte verschwindet also, wenn die Felder  $\Phi_i(\vec{r})$  die Euler-Lagrange Gleichungen Gl. 12.35 erfüllen.

Wir erhalten also den Erhaltungssatz

$$\vec{\nabla} \vec{J} = 0$$

mit

$$J_k = \left. \frac{\partial r'_k}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \ell(\Phi_i, \vec{\nabla} \Phi_i, \vec{r}) + \sum_i \left. \frac{\partial \Phi'_i(\vec{r})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))}$$

Dies sieht noch nicht wie ein Erhaltungssatz aus, da wir nicht zwischen Raum- und Zeitkoordinaten unterschieden haben. Dazu kommen wir später.

Um zu der bekannten Form zu gelangen, drücken wir das transformierte Feld durch  $W_i$  aus.

$$\Phi'_i(\vec{r}(\vec{r}, \varepsilon), \varepsilon) = W_i(\Phi_k(\vec{r}), \vec{r}, \varepsilon)$$

Indem wir die  $\varepsilon$ -Ableitung bilden, erhalten wir den Ausdruck für die partielle  $\varepsilon$ -Ableitung des transformierten Feldes.

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial \Phi'_i}{\partial r_j} \frac{\partial r'_j}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \Phi'_i}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi'_i}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} - \sum_j \frac{\partial \Phi'_i}{\partial r_j} \frac{\partial r'_j}{\partial \varepsilon} \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} - \sum_j \left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_j} \frac{\partial r'_j}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

Damit erhält die Noetherstromdichte die Form

$$\begin{aligned} J_k &= \left( \sum_j \left. \frac{\partial r'_j}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[ \delta_{k,j} \ell(\Phi_i, \vec{\nabla} \Phi_i, \vec{r}) - \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_j} \right] \right) \\ &\quad + \sum_i \left. \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_k \Phi_i(\vec{r}))} \end{aligned}$$

Schließlich bringen wir den Ausdruck in die kovariante Form

$$\begin{aligned} J^\mu(x^\alpha) &= \left( \left. \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[ g^\mu{}_\nu \ell - \sum_i \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i(\vec{r}))} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^\nu} \right] \right) \\ &\quad + \sum_i \left. \frac{\partial W_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Phi_i(\vec{r}))} \end{aligned}$$

Der differentielle Erhaltungssatz lautet dann

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Damit haben wir das Noethertheorem für den Feldanteil bewiesen. Bevor wir uns den Pfaden zuwenden, wollen wir aber noch einen geschlossenen Ausdruck für den Gradienten der Stufenfunktion  $\theta_\Omega$  zuwenden.

### 12.6.1 Verallgemeinerung des Noethertheorems auf Pfade

**Editor:** Das ist noch zu tun

## 12.7 Aufgaben

**Editor:** Die Aufgaben sind nur Ideen und müssen noch ausgearbeitet werden.

### 12.7.1 Sonnensegel

Betrachte ein Raumschiff mit der Masse  $M$ , das ein Sonnensegel mit der Fläche  $A$  besitzt. Das Sonnensegel reflektiert das Sonnenlicht, und gewinnt damit Impuls aus dem Sonnenlicht. Wie groß muss das Sonnensegel sein, damit das Raumschiff aus dem Gravitationsfeld entkommen kann.

Zur Information: Der Sonnenwind ist allerdings ein Strahl ionisierter Teilchen, das mit einem Plasmasegel genutzt werden könnte. Der Sonnenwind wird durch das Magnetfeld der Erde zu den Polen geleitet, wo es als Nordlicht sichtbar wird.

### 12.7.2 Nanoteilchen im Laserlicht

Betrachte ein Nanoteilchen, das durch eine Kugel mit dem Durchmesser  $1\text{nm}$  beschrieben wird. Das Nanoteilchen werde von einem Laserstrahl getroffen. Durch das elektrische Feld des Lichtfeldes wird es polarisiert. Ein Teil der eingestrahlten Energie wird in Wärme umgewandelt, der Rest wird gleichmäßig in Richtung des Lichtstrahls und in die entgegengesetzte Richtung abgestrahlt. Bestimme die Erwärmung und die Beschleunigung des Nanoteilchens.

### 12.7.3 Energie-Impulstensor des Elastischen Feldes

Die Wirkung des elastischen Feldes sei durch

$$\mathcal{L}$$

gegeben. Bestimme den Energie-Impulstensor, und daraus ....

## Chapter 13

# Ursprung der Maxwellgleichungen(4h)

### 13.1 Einführung

Bisher haben wir die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft als gegeben angesehen, und die Eigenschaften ihrer Lösungen untersucht. Die Maxwellgleichungen lassen sich aber auch aus zwei fundamentalen Prinzipien als mögliche Bewegungsgleichungen ableiten, nämlich der Lorentzsymmetrie und der lokalen Eichsymmetrie. Die Prinzipien, die hier dargestellt werden, bilden in ähnlicher Form die Grundlage der heutigen Elementarteilchentheorie.

Wir werden hier das Klein-Gordon Feld untersuchen<sup>1</sup>. Die Klein-Gordon Gleichung ist der relativistische Gegenpart der Schrödinger Gleichung. Schrödinger leitete die Klein-Gordon Gleichung noch vor der Schrödinger Gleichung her, hat sie aber aus zwei Gründen verworfen. Erstens folgen aus ihr Antiteilchen, die damals noch unbekannt waren und daher scheinbar im Widerspruch mit der Realität zu stehen schienen. Zweitens sagte sie die Feinstruktur des Wasserstoffatoms falsch vorher.

Inzwischen weiss man, dass Elektronen nicht durch die Klein-Gordon Gleichung beschrieben werden, sondern durch die Dirac-Gleichung, was die falsche Vorhersage der Feinaufspaltung erklärt. Die Dirac Gleichung reproduziert das Experiment perfekt. Die Dirac Gleichung führt dann auf eine weitere Eigenschaft, den Spin, bzw. den Eigendrehimpuls, des Elektrons. Die nichtrelativistische Näherung der Dirac Gleichung ist die Pauli Gleichung.

Das Klein-Gordon Feld beschreibt Teilchen ohne Spin. Inzwischen kennt man solche Teilchen, die zur Klasse der Mesonen gehören und die als Paar von zwei Quarks darstellbar sind.

### 13.2 Wirkung des Klein-Gordon Felds

In der Quantenmechanik werden Teilchen durch Felder dargestellt, genau wie Photonen in der Elektrodynamik durch die Eichpotentiale dargestellt werden. In der Quantenmechanik werden diese Felder Wellenfunktionen genannt.

Das Klein-Gordon Feld ist die quantenmechanische Wellenfunktion des einfachsten relativistischen Teilchens. Zum Beispiel kann das  $\pi$ -Meson?? durch das Klein-Gordon Feld beschrieben werden. Zu beachten ist, dass das Feld  $\Psi$  komplexwertig ist.

Die Wirkung des Klein-Gordon Feldes ist

---

<sup>1</sup>Oskar Klein 1894-1977: Schwedischer Physiker. Auch für die Kaluza-Klein Theorie bekannt.

## WIRKUNG DES KLEIN-GORDON FELDES

$$\begin{aligned}
S[\Psi(x^\mu)] &= \frac{1}{c} \int d^4x \underbrace{\frac{1}{2m_0} [(i\hbar\partial_\mu\Psi)(i\hbar\partial^\mu\Psi)^* - m_0^2 c^2 \Psi\Psi^*]}_{\ell_{KG}} \\
&= \underbrace{\int dt \int d^3r}_{\frac{1}{c} \int d^4x} \frac{1}{2m_0 c^2} [\hbar^2 (\partial_t\Psi)(\partial_t\Psi^*) - c^2 \hbar^2 (\vec{\nabla}\Psi)(\vec{\nabla}\Psi^*) - m_0^2 c^4 \Psi\Psi^*]
\end{aligned} \tag{13.1}$$

Dabei ist  $m$  die Ruhemasse des entsprechenden Teilchens und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.  $\hbar = 2\pi\hbar$  ist das Plancksche Wirkungsquantum.

Diese Wirkung kann aus recht allgemeinen Annahmen abgeleitet werden.<sup>2</sup>

Sehen wir davon ab, dass das Klein-Gordon Feld komplexwertig ist, gibt es ein rein klassisches Analogon, nämlich ein System von Pendeln, die durch Federn miteinander verbunden sind. Im kontinuierlichen Grenzfall wird die Lagrangefunktion dieses Systems mit der des Klein-Gordon Feldes identisch. Mehr darüber steht in Kapitel 10.7 von  $\Phi SX$ : Klassische Mechanik.[18]

Die Lagrangedichte ist

$$\ell_{KG}[\Psi(x, t)] = \frac{1}{2m_0} [(i\hbar\partial_\mu\Psi)(i\hbar\partial^\mu\Psi)^* - m_0^2 c^2 \Psi\Psi^*] \tag{13.3}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m_0} (\partial_\mu\Psi^*)(\partial^\mu\Psi) - \frac{1}{2} m_0 c^2 \Psi^*\Psi \tag{13.4}$$

### 13.3 Dispersionsrelation des Klein-Gordon Felds

Betrachten wir aber zunächst die Bewegungsgleichungen, Gl. 11.8 auf S. 155 und die daraus resultierenden Dispersionsrelation, um zu erkennen, um was für ein System es sich handelt.

$$\begin{aligned}
0 &= -\partial^\mu \frac{\partial \ell_{KG}}{\partial (\partial^\mu \Psi^*)} + \frac{\partial \ell_{KG}}{\partial \Psi^*} \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \partial^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{1}{2} m_0 c^2 \Psi \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi - \vec{\nabla}^2 \Psi + \frac{m_0 c^4}{\hbar^2} \Psi \right]
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Die allgemeinsten Annahmen sind

- Zeit und Raumtranslationssymmetrie, Isotropie des Raums
- die Forderung, dass die Terme quadratisch in der Wellenfunktion sein sollen.
- die Forderung, dass Ableitungen höchstens in der zweiten Ordnung auftreten
- Eichinvarianz: Die Lagrangefunktion hängt nicht von der Phase der Wellenfunktion ab

Die Eichinvarianz verlangt dass  $\Psi$  und  $\Psi^*$  immer gepaart auftreten, weil sich ein Phasenfaktor sonst nicht wegheben würde. Entsprechend müssen die Gradienten als Paar von einem kontra und einem kovarianten Gradienten auftreten, damit der Term invariant unter Lorentztransformationen ist. Die Gradiententerme müssen also von der Form  $A = \partial_\mu \partial^\mu (\Psi^* \Psi)$ ,  $B = \partial_\mu (\Psi^* \partial^\mu \Psi)$ ,  $C = \Psi^* \partial_\mu \partial^\mu \Psi$ ,  $D = (\partial_\mu \Psi^*)(\partial^\mu \Psi)$  sein. Terme  $A$  und  $B$  können mittels Gausstheorem in ein Oberflächenintegral über den Raum-Zeitbereich der Wirkung transformiert werden. Mit natürlichen Randbedingungen verschwindet das räumliche Oberflächenintegral. Die Terme zu Anfangs- und Endzeit des Wirkungsintegrals sind invariant unter der Variation, und gehen daher nicht in die Bewegungsgleichungen ein. Diese Terme sind also irrelevant. Term  $C$  kann durch partielle Integration in  $D$  und  $B$  umgewandelt werden. Der einzig mögliche Gradiententerm ist also  $D$ . Die Lagrange dichte muss also von der Form

$$\ell = a \Psi^* \Psi + b (\partial_\mu \Psi^*)(\partial^\mu \Psi) \tag{13.2}$$

sein und das ist die Lagrangedichte für das Klein-Gordon Feld mit zwei wählbaren Parametern  $a$  und  $b$ .

Dies ist die **Klein-Gordon Gleichung**. Bis auf den Masseterm entspricht diese Gleichung der Wellengleichung.

Die Dispersionsrelation erhält man wie üblich durch den Partialwellenansatz<sup>3</sup>

$$\Psi(x_\mu) = \Psi(r, t) = \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) = \exp(-ik_\mu x^\mu)$$

der die DGL in eine algebraische Gleichung umwandelt.

$$\begin{aligned} 0 &= -(\hbar\omega)^2 + (\hbar\vec{k}c)^2 + m^2c^4 \\ \Rightarrow \hbar\omega(\vec{k}) &= \pm\sqrt{m^2c^4 + (\hbar k)^2c^2} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des **Korrespondenzprinzips**<sup>4</sup> können wir der Wellenzahl eine Energie  $E = \hbar\omega$  und dem Wellenvektor einen Impuls  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  zuordnen.

$$E = \hbar\omega; \vec{p} = \hbar\vec{k} \Rightarrow E = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

Das Klein-Gordon Feld hat also gerade die Dispersionsrelation eines relativistischen Teilchens.

## 13.4 Globale Eichinvarianz und Ladungserhaltung

Im folgenden werden wir zeigen, dass die Wirkung des Klein-Gordon Feldes eine Symmetrie besitzt, aus der wir mit Hilfe des Noethertheorems die Ladungserhaltung ableiten können. Damit werden alle uns bisher bekannten Erhaltungsgrößen auf Symmetrien zurückgeführt.

Das Klein-Gordon Feld lässt sich durch zwei reelle Felder  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  darstellen.

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 + i\Psi_2) \\ \Psi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 - i\Psi_2) \end{aligned}$$

Die Felder  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  treten in der Wirkung nicht als unabhängige Größen auf, sondern nur in Kombination, nämlich als Betragsquadrat<sup>5</sup>, bzw. als Betragsquadrat ihrer Ableitungen. Die Wirkung ist daher invariant unter einer Drehung der Felder in der komplexen Ebene. Eine Drehung in der komplexen Ebene bewerkstelligt man durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl mit Betrag 1, also mit  $e^{i\phi}$ . Neben der Lorentzsymmetrie besitzt die Wirkung also eine weitere Symmetrie, die globale Eichsymmetrie.

Die Eichtransformation hat die Form

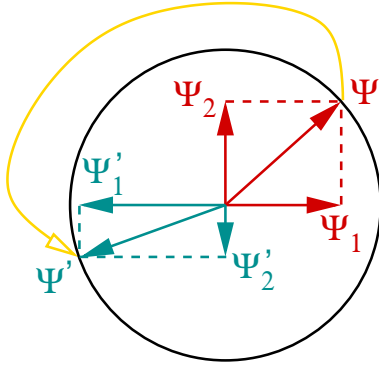
$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu \\ \Psi'(x^\mu) &= e^{-i\frac{q}{\hbar}\epsilon}\Psi(x^\mu) = \Psi(x^\mu) - i\frac{q}{\hbar}\epsilon\Psi(x^\mu) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (13.5)$$

wobei  $\epsilon$  reell ist.  $q$  ist ein zunächst beliebiger Faktor, den wir später mit der Ladung des Teilchens identifizieren werden. Die Wahl der Faktoren  $q/\hbar$  hat keine besondere Bedeutung, da sie nur einer Skalierung von  $\epsilon$  entsprechen. Sie sind so gewählt, dass die resultierenden Gleichungen die gewohnte Form erhalten.

<sup>3</sup>Beachte, dass  $k_\mu = (\omega/c, -k_x, -k_y, -k_z)$  und  $X^\mu = (ct, x, y, z)$

<sup>4</sup>Das Korrespondenzprinzip wird im Band ΦSX: Quantenmechanik[19] hergeleitet. Es beruht auf einer Analogie der Bewegungsgleichungen für ein Wellenpaket mit den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für klassische Teilchen.

<sup>5</sup> $\Psi^*\Psi = \Psi_1^2 + \Psi_2^2$  und  $(\partial_\mu\Psi)^*(\partial^\mu\Psi) = (\partial_\mu\Psi_1)(\partial^\mu\Psi_1) + (\partial_\mu\Psi_2)(\partial^\mu\Psi_2)$



Diese Eichsymmetrie ist scheinbar unabhängig von der Eichsymmetrie der Maxwellgleichungen. Wir werden bald sehen, dass die beiden nur Teile der selben Symmetrietransformation sind.

Laut Noethertheorem führt jede kontinuierliche Transformation zu einer Erhaltungsgröße. Wie wir gleich sehen werden, führt die globale Eichinvarianz auf die Ladungserhaltung.

Der aus der Eichsymmetrie resultierende Noetherstrom ist gemäß Gl. 12.4 auf S. 165

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \ell_{KG}}{\partial(\partial_\mu \Psi^*)} \frac{d\Psi'^*}{d\varepsilon} + \frac{\partial \ell_{KG}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \frac{d\Psi'}{d\varepsilon} \\ &= \left( \frac{\hbar^2}{2m} \partial^\mu \Psi \right) \left( i \frac{q}{\hbar} \Psi^* \right) + \left( \frac{\hbar^2}{2m} \partial^\mu \Psi^* \right) \left( -i \frac{q}{\hbar} \Psi \right) \\ &= q \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*) \end{aligned} \quad (13.6)$$

$$= q \frac{1}{2m} [\Psi^* (i\hbar \partial^\mu \Psi) + \Psi (i\hbar \partial^\mu \Psi)^*] \quad (13.7)$$

Dies ist die Viererstromdichte.

Für die Viererstromdichte gilt, laut Noethertheorem Gl. 12.3, der Ladungserhaltungssatz

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Ersetzen wir  $\partial^\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla})$  und den Viererstrom  $j^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\rho c, \vec{j})$ , dann erhalten wir die Ausdrücke<sup>6</sup> für die Ladungsdichte  $\rho$  und die Stromdichte  $\vec{j}$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (13.8)$$

$$\text{mit} \quad \rho = q \frac{i\hbar}{2mc^2} (\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*) \quad (13.9)$$

$$\text{und} \quad \vec{j} = q \frac{-i\hbar}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \quad (13.10)$$

Die Stromdichte ist gerade der Ausdruck für Ladung mal der Teilchenstromdichte, wie sie aus der Schrödingergleichung folgt. Die Ladungsdichte hat aber eine ungewöhnliche Form, da man  $\rho(\vec{r}, t) = q\Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$  erwarten würde. wie er aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik bekannt ist. Dem wollen wir uns genauer zuwenden.

## 13.5 Schrödingergleichung als nichtrelativistischer Grenzfall

Der Ausdruck für die Ladungsdichte unterscheidet sich von dem Ausdruck, den wir aus der nichtrelativistischen Ladungsdichte kennen. Dort wurde das Betragsquadrat  $P(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$  der

<sup>6</sup>An diesem Punkt der Theorie sind diese Ausdrücke als die Definition von Ladungsdichte und Stromdichte zu betrachten. Später wird deutlich, dass diese Größen tatsächlich mit den Begriffen, die vor diesem Kapitel entwickelt wurden, übereinstimmen. Der Zusammenhang mit der Ladungsdichte  $\rho = q\Psi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r})$  der Schrödinger Gleichung wird später gezeigt.



Wellenfunktion mit der Wahrscheinlichkeitsdichte identifiziert, ein Teilchen zur Zeit  $t$  am Ort  $\vec{r}$  zu finden. Für die Ladungsdichte erwarten wir deshalb den Ausdruck  $\rho(\vec{r}, t) = qP(\vec{r}, t)$ . Stattdessen erhalten wir für das Klein-Gordon Feld den Ausdruck Gl. 13.9. Um diesen Widerspruch aufzulösen betrachten wir hier den nichtrelativistischen Grenzfall der Klein-Gordon Theorie, was uns letztendlich auf die bekannte Schrödingergleichung führt.

### Nichtrelativistischer Grenzfall

Eingangs wurde erwähnt, dass die Schrödinger Gleichung den nichtrelativistischen Grenzfall der Klein-Gordon Gleichung darstellt. Deshalb wollen wir diesen Grenzfall bilden und damit die Schrödinger Gleichung aus der Wirkung des Klein-Gordon Feldes ableiten.

Betrachten wir nochmals die Dispersionsrelation eines relativistischen Teilchens

$$E = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \quad (13.11)$$

Wir erhalten den nichtrelativistischen Grenzfall, indem wir

1. die Ruheenergie  $E_0 = m_0 c^2$  abziehen.
2. Anteile vernachlässigen und
3. den nichtrelativistischen Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  bilden.

Mit diesen Schritten erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{E} &\stackrel{\text{def}}{=} E - m_0 c^2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[ \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right] \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{m_0^2 c^2} + O\left(\left(\frac{\vec{p}^2}{m_0^2 c^2}\right)^2\right) - 1 \right] \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + \underbrace{m_0 c^2 O\left(\left(\frac{|\vec{p}|}{m_0 c}\right)^4\right)}_{=O\left(\frac{1}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

Für  $c \rightarrow \infty$  erhalten wir also gerade die nichtrelativistische Dispersionsrelation.

Diese Schritte müssen nun auf die Wellengleichung übertragen werden. Eine Energieverschiebung entspricht wegen  $E = \hbar\omega$  einer Frequenzverschiebung. Betrachten wir also eine Welle des Klein-Gordon Feldes.

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \stackrel{p=\hbar k; E=\hbar\omega}{=} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)} = \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - (E - m_0 c^2)t)}}_{\bar{\Psi}(\vec{r}, t)} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\ &= \bar{\Psi}(\vec{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \end{aligned} \quad (13.12)$$

Die neue Welle  $\bar{\Psi}$  entspricht einer Welle mit um die Ruheenergie reduzierten Energie. Eine Energieverschiebung um die Ruheenergie entspricht also einer Multiplikation mit einem zeitabhängigen Phasenfaktor entsprechend

$$\bar{\Psi}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(\vec{r}, t) e^{\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (13.13)$$

Um die Ruheenergie abzuziehen, müssen wir die Wirkung und alle anderen Größen, wie die Ladungsdichte, durch  $\bar{\Psi}$  ausdrücken.

### Nichtrelativistische Ladungsdichte

Wir wollen das einmal am Ladungserhaltungssatz ausprobieren und Ladungsdichte Gl. 13.9 und die Stromdichte Gl. 13.10 durch  $\bar{\Psi}$  ausdrücken. Dazu benötigen wir die Zeit- und Raumableitungen von  $\Psi$ .

$$i\hbar\partial_t\Psi \stackrel{\text{Gl. 13.12}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} (i\hbar\partial_t\bar{\Psi} + m_0c^2\bar{\Psi}) \quad (13.14)$$

$$\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi \stackrel{\text{Gl. 13.12}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\bar{\Psi} \quad (13.15)$$

Dies setzen wir in die Ausdrücke für Ladungs und Stromdichte ein und erhalten

$$\begin{aligned} \rho &\stackrel{\text{Gl. 13.9}}{=} q\frac{i\hbar}{2mc^2}\{\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*\} \\ &= \frac{q}{2mc^2}\{\Psi^*(i\hbar\partial_t\Psi) + \Psi(i\hbar\partial_t\Psi)^*\} \\ &\stackrel{\text{Gl. 13.14}}{=} \frac{q}{2mc^2}\{\bar{\Psi}^*(i\hbar\partial_t\bar{\Psi} + m_0c^2\bar{\Psi}) + \bar{\Psi}(i\hbar\partial_t\bar{\Psi} + m_0c^2\bar{\Psi})^*\} \\ &= q\bar{\Psi}^*\bar{\Psi} + \frac{q}{2mc^2}\{\bar{\Psi}^*(i\hbar\partial_t\bar{\Psi}) + \bar{\Psi}(i\hbar\partial_t\bar{\Psi})^*\} \end{aligned} \quad (13.16)$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &\stackrel{\text{Gl. 13.10}}{=} q\frac{-i\hbar}{2m}\{\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\} \\ &= \frac{q}{2m}\{\Psi^*(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi) + \Psi(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi)^*\} \\ &\stackrel{\text{Gl. 13.15}}{=} \frac{q}{2m}\{\bar{\Psi}^*(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\bar{\Psi}) + \bar{\Psi}(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\bar{\Psi})^*\} \\ &= q\frac{-i\hbar}{2m}\{\bar{\Psi}^*\vec{\nabla}\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\vec{\nabla}\bar{\Psi}^*\} \end{aligned} \quad (13.17)$$

Wir sehen, dass die Stromdichte ihre Form beibehält. Bei der Ladungsdichte ist der dominante Term für  $c \rightarrow \infty$  gerade der Ausdruck  $\rho = q\bar{\Psi}^*\bar{\Psi}$ , den wir aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik kennen. Der letzte Term verschwindet im nichtrelativistischen Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  und stellt daher eine relativistische Korrektur dar.

Wir sehen hier, wie wichtig es ist, das Gedankengebäude der Theoretischen Physik einigermaßen zu überblicken. Der Ausdruck für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $P(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$  wird in Lehrbüchern der Klassischen Mechanik als Postulat aufgeführt. Zumindest für ein Klein-Gordon Feld wäre aber Gl. 13.16 der richtige Ausdruck. Der Gültigkeitsbereich des üblich benutzten Ausdrucks für die Ladungsdichte ist also beschränkt. Sprengt eine Anwendung den Gültigkeitsbereich, kommt man unweigerlich in Schwierigkeiten, wenn man die grundlegenden Annahmen nicht kennt. Versteht man allerdings den Aufbau der verwendeten Theorien, dann erkennt man auch die Voraussetzungen der Theorien und damit den Gültigkeitsbereich. Aus eigener Erfahrung kann ich sagen, dass dies kein rein akademisches Problem ist. Physiker müssen sich häufig mit dem Grenzbereich etablierter Theorien auseinandersetzen, und gerade dort liegt ihre eigentliche Stärke.

**Wirkung des Schrödingerfeldes (Heimstudium)**

Nun bilden wir den nichtrelativistischen Grenzfall der Klein-Gordon Wirkung Gl. 13.1.

$$\begin{aligned}
 S_{KG}[\bar{\Psi}] &\stackrel{\text{Gl. 13.1}}{=} \frac{1}{2m_0 c^2} \int dt \int d^3 r \left\{ \underbrace{(i\hbar \partial_t \Psi)^* (i\hbar \partial_t \Psi)}_{\sim E^2} - \underbrace{\left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Psi\right)^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Psi\right)}_{\sim p^2} c^2 - m_0^2 c^4 \Psi^* \Psi \right\} \\
 &\stackrel{\text{Gl. 13.14}}{=} \frac{1}{2m_0 c^2} \int dt \int d^3 r \left\{ (i\hbar \partial_t \bar{\Psi} + m_0 c^2 \bar{\Psi})^* (i\hbar \partial_t \bar{\Psi} + m_0 c^2 \bar{\Psi}) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \bar{\Psi}\right)^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \bar{\Psi}\right) c^2 - m_0^2 c^4 \bar{\Psi}^* \bar{\Psi} \right\} \\
 &= \frac{1}{2m_0 c^2} \int dt \int d^3 r \left\{ (i\hbar \partial_t \bar{\Psi})^* (i\hbar \partial_t \bar{\Psi}) \right. \\
 &\quad \left. + m_0 c^2 [\bar{\Psi}^* (i\hbar \partial_t \bar{\Psi}) + (i\hbar \partial_t \bar{\Psi})^* \bar{\Psi}] - \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \bar{\Psi}\right)^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \bar{\Psi}\right) c^2 \right\} \\
 &= \int dt \int d^3 r \left\{ \frac{i\hbar}{2} (\bar{\Psi}^* \partial_t \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \partial_t \bar{\Psi}^*) - \frac{1}{2m_0} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \bar{\Psi}\right)^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \bar{\Psi}\right) + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \right\} \\
 &\stackrel{\text{Part. Int.}}{=} \int dt \int d^3 r \left\{ i\hbar \bar{\Psi}^* \partial_t \bar{\Psi} - \frac{1}{2m_0} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \bar{\Psi}\right)^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \bar{\Psi}\right) \right\} \\
 &\quad + \frac{i\hbar}{2} \int dt \int d^3 r \partial_t (\bar{\Psi}^* \bar{\Psi}) + O\left(\frac{1}{c^2}\right)
 \end{aligned}$$

Das totale Zeitintegral kann vernachlässigt werden, da es auf die Ränder des Integrations-Zeitintervalls abgebildet werden kann. Da Randwerte bei der Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen nicht variiert werden, beeinflusst dieser Term die Bewegungsgleichungen nicht. Wir erhalten nun die Wirkung der Schrödinger Gleichung für den Fall eines freien Teilchens.

## WIRKUNG DER SCHRÖDINGER GLEICHUNG

$$S[\bar{\Psi}(\vec{r}, t)] = \int dt \int d^3 r \left\{ i\hbar \bar{\Psi}^* \partial_t \bar{\Psi} - \frac{\hbar^2}{2m_0} (\vec{\nabla} \bar{\Psi}^*) (\vec{\nabla} \bar{\Psi}) \right\}$$

Nun können wir daraus die Schrödingergleichung als Euler-Lagrange Gleichung dieser Wirkung ableiten.

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\Psi}^*(\vec{r}, t)} = i\hbar \partial_t \bar{\Psi} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{\nabla}^2 \bar{\Psi} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad i\hbar \partial_t \bar{\Psi} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \vec{\nabla}^2 \bar{\Psi}$$

Dies ist nichts weiter als die Schrödinger Gleichung für ein freies Teilchen (ohne Potentiale, die auf es einwirken.)

**13.6 Herstellen der lokalen Eichinvarianz**

Wir können nun fragen, ob die Theorie unter der Eichtransformation nicht nur global sondern auch lokal invariant ist. Lokale Eichsymmetrie bedeutet, dass auch die relative Phase an verschiedenen Ort-Zeitpunkten unbeobachtbar ist.

Betrachten wir die lokale Eichtransformation

$$\Psi'(x^\alpha) = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x^\alpha)\right) \Psi(x^\alpha) \quad (13.18)$$

$$\Rightarrow i\hbar \partial_\mu \Psi'(x^\alpha) = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x^\alpha)\right) \left\{ i\hbar \partial_\mu \Psi(x^\alpha) + q\left(\partial_\mu \Lambda(x^\alpha)\right) \Psi(x^\alpha) \right\} \quad (13.19)$$

dann sehen wir, dass die Wirkung nicht invariant gegenüber dieser Transformation ist.

Die Lagrangedichte für die transformierten Felder ist

$$\begin{aligned}
 \ell'_{KG} &= \frac{1}{2m_0} [(i\hbar\partial_\mu\psi')(i\hbar\partial^\mu\psi')^* - m_0^2 c^2 \psi'\psi'^*] \\
 &= \frac{1}{2m_0} [(i\hbar\partial_\mu\psi + q(\partial_\mu\Lambda)\psi)^*(i\hbar\partial^\mu\psi + q(\partial^\mu\Lambda)\psi) - m_0^2 c^2 \psi\psi^*] \\
 &= \frac{1}{2m_0} [(i\hbar\partial_\mu\psi)(i\hbar\partial^\mu\psi)^* - m_0^2 c^2 \psi\psi^*] \\
 &\quad + \underbrace{(\partial_\mu\Lambda) \frac{q}{2m_0} [\psi^*(i\hbar\partial^\mu\psi) + \psi(i\hbar\partial^\mu\psi)^*]}_{j^\mu} + \frac{q^2}{2m_0} (\partial_\mu\Lambda)(\partial^\mu\Lambda)\psi\psi^*
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also Terme welche den Strom und  $\psi^*\psi$  an das Eichfeld koppeln. Diese Terme führen dazu, dass das Klein-Gordon Feld je nach Phase unterschiedliche Kräfte erfährt.

Es ist durchaus zulässig zu behaupten, dass die Klein-Gordon Gleichung ein System beschreibt, in dem keine Eichsymmetrie herrscht. In einem solchen System wäre die Phase der Wellenfunktion messbar. Eine Welt, die durch diese Gleichung beschrieben wird, entspricht aber einem System, an dem wir zu Zeit nicht interessiert sind, weil sie nicht die Elektrodynamik beschreibt. Ein anderer Zugang ist es, die Eichsymmetrie zu postulieren. Dazu muss die Theorie derart abgeändert werden, dass sie lokal eichinvariant wird. Diesen Weg werden wir im folgenden beschreiten.

Offensichtlich müssen wir die Eichtransformation derart abändern, dass die Zusatzterme in der Wirkung, die durch die Eichtransformation entstehen, kompensiert werden. Wenn die Ströme an ein Feld, nämlich  $\partial_\mu\Lambda$  koppeln, ist die einfachste Lösung, dieses Feld durch ein Vektorfeld  $A_\mu$  zu ersetzen, das sich mit der Eichtransformation mittransformiert, und zwar derart, dass sich die Eichfelder wegheben.

Wir führen also ein zusätzliches Vektorfeld  $A_\mu$  ein, das sich gemeinsam mit dem Klein-Gordon Feld derart transformiert. Wie wir später sehen werden enthält dieses Vektorfeld gerade die Eichpotentiale  $A^\mu = (\Phi/c, \vec{A})$ .

Die lokale Eichtransformation ist wie folgt definiert:

#### LOKALE EICHTRANSFORMATION

$$\begin{aligned}
 \psi'(x^\alpha) &= e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x^\alpha)}\psi(x^\alpha) \\
 A'_\mu(x^\alpha) &= A_\mu(x^\alpha) + \partial_\mu\Lambda(x^\alpha)
 \end{aligned} \tag{13.20}$$

Die zweite Transformationsgleichung ist gerade die kovariante Version von Gl. 9.5.

Diese Transformation ändert zwar noch die Ableitungen, lässt aber die sogenannte eichinvariante Ableitung  $D_\mu$  invariant.

#### EICHINVARIANTE ABLEITUNG

$$i\hbar D_\mu \stackrel{\text{def}}{=} i\hbar\partial_\mu - qA_\mu(x^\alpha) \tag{13.21}$$

Die eichinvariante Ableitung transformiert sich genau wie das Feld  $\psi$ .

Wir überprüfen schnell, ob sich die eichinvariante Ableitung  $D_\mu$  unter der Eichtransformation

Gl. 13.20 tatsächlich wie das Klein-Gordon Feld transformiert.

$$\begin{aligned}
 i\hbar D'_\mu \Psi' &= i\hbar \partial_\mu \Psi' - q A'_\mu \Psi' \\
 &= i\hbar \partial_\mu \left( e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda} \Psi \right) - q (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) \left( e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda} \Psi \right) \\
 &= e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda} [i\hbar \partial_\mu \Psi + q(\partial_\mu \Lambda) \Psi - q(A_\mu + \partial_\mu \Lambda) \Psi] \\
 &= e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda} [i\hbar \partial_\mu \Psi - q A_\mu \Psi] \\
 &= e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda} i\hbar D_\mu \Psi
 \end{aligned}$$

Der Phasenfaktor hebt sich in der Wirkung weg, weil immer ein Term mit dem entsprechend komplex konjugierten Term multipliziert werden und  $(e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda})^* e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda} = 1$ .

Um zu einer eichinvarianten Theorie zu gelangen, ersetzen wir die Ableitungen in der Wirkung des Klein-Gordon Feldes durch die entsprechenden eichinvarianten Ableitungen. Wenn wir die eichinvariante Ableitungen einführen, müssen wir den Term  $\partial^\mu \Psi^*$  in der Lagrangedichte als  $(D^\mu \Psi)^*$  und nicht als  $D^\mu(\Psi^*)$  übersetzen, weil die Lagrangedichte andernfalls auch komplexe Werte annehmen kann. Die so erhaltene Wirkung ist

$$\begin{aligned}
 S[\Psi] &= \frac{1}{c} \int d^4x \frac{1}{2m_0} [(i\hbar D_\mu \Psi)^* (i\hbar D^\mu \Psi) - m^2 c^2 \Psi^* \Psi] \\
 &= \frac{1}{c} \int d^4x \frac{1}{2m} [(i\hbar \partial^\mu \Psi - q A^\mu \Psi)^* (i\hbar \partial_\mu \Psi - q A_\mu \Psi) - m^2 c^2 \Psi^* \Psi]
 \end{aligned}$$

Da wir die Theorie geändert haben, müssen wir erneut den Noetherstrom bestimmen. Wir werden ihn später benötigen, wenn wir den Zusammenhang mit den Maxwellgleichungen herstellen. Dazu verwenden wir die globale Eichtransformation  $\Psi' = e^{-i\frac{q}{\hbar}\epsilon} \Psi$ .

$$\begin{aligned}
 j^\mu &= \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Psi^*)} \frac{d\Psi'^*}{d\epsilon} + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \frac{d\Psi'}{d\epsilon} \\
 &= \frac{1}{2m} \left[ (i\hbar \partial^\mu \Psi - q A^\mu \Psi) (-i\hbar) \left(-i\frac{q}{\hbar}\right) \Psi^* + (i\hbar \partial^\mu \Psi - q A^\mu \Psi)^* (i\hbar) \left(-i\frac{q}{\hbar}\right) \Psi \right] \\
 &= \frac{q}{2m} [\Psi^* (i\hbar \partial^\mu \Psi - q A^\mu \Psi) + (i\hbar \partial^\mu \Psi - q A^\mu \Psi)^* \Psi] \\
 &= \frac{q}{2m} [\Psi^* (i\hbar D^\mu \Psi) + (i\hbar D^\mu \Psi)^* \Psi] \\
 &= q \frac{i\hbar}{2m} [\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*] - \frac{q^2}{m} \Psi^* \Psi A^\mu
 \end{aligned} \tag{13.22}$$

Die Stromdichte erhält also einen zusätzlichen Term, der von den Eichpotentialen abhängt. Es ist wichtig, in der Elektrodynamik das Eichpotential in der Definition der Stromdichte nicht zu vergessen!

## 13.7 Freie Felder

Bisher haben wir die Wirkung für geladene Teilchen in vorgegebenen Eichfeldern konstruiert. Die Wirkung ist allerdings nur dann auch translationsinvariant in Raum und Zeit, wenn die Eichfelder konstant sind, also in Abwesenheit von elektrischen und magnetischen Feldern.

Um die Wirkung translationsinvariant zu machen, benötigen wir einen Term für die freien Felder, damit wir Bewegungsgleichungen für die Eichfelder selber erhalten.<sup>7</sup> Um nichttriviale Lösungen zu erhalten, muss der Term Ableitungen  $\partial_\mu A_\nu$  enthalten. Enthält die Wirkung keine Ableitungen der Felder, sind die Euler-Lagrange Gleichungen keine Differentialgleichungen für die Felder, und wir

<sup>7</sup>Betrachten wir alles Lorentzinvariante Ausdrücke bis zur quadratischen Ordnung in den Eichpotentialen. Wir beginnen mit allen Lorentzskalaren, Vektoren und Tensoren, die die Eichpotentiale zur ersten Ordnung und Ableitungen bis maximal zur ersten Ordnung besitzen.  $A^\mu, \partial_\mu A^\mu, \partial_\mu A^\nu$ . Daraus bilden wir alle möglichen Lorentzskalare:  $A_\mu A^\mu, (\partial_\mu A^\mu)^2, (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu), (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$ .

hätten keine Bewegungsgleichungen. Die Ableitung ist aber nicht eichinvariant, weil  $\partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \Lambda) \neq \partial_\mu A_\nu$ . Damit sich die Zusatzterme wegheben, kombinieren wir die Ableitungen in der Form  $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Diese antisymmetrisierten Ableitungen bilden gerade den den **Feldstärketensor**,

$$F_{\mu,\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

wie er in Gl. 11.11 auf S. 157 definiert wurde.

Um eine Lorentz- und eichinvariante Wirkung aus den Eichpotentialen zu bilden, müssen wir aus dem Feldstärketensor Lorentzskalare bilden. Da die Eichpotentiale nicht eichinvariant sind, dürfen sie selber nicht auftreten, außer wir führen Zusatzterme ein, welche die Eichinvarianz wieder herstellen. Wir betrachten nur Terme bis zur zweiten Ordnung in den Eichpotentialen, wovon es nur zwei gibt, nämlich

$$F_\mu^\mu; \quad F_{\mu,\nu} F^{\mu,\nu} \quad (13.23)$$

Der erste Term ist null, weil der Feldstärketensor antisymmetrisch ist. Es bleibt also nur die zweite Form.

Wir versehen ihn gleich mit dem richtigen Faktor und erhalten damit die Wirkung der freien Felder.

$$\begin{aligned} S_{FF}[A^\mu] &= -\frac{1}{c} \int d^4x \frac{1}{4\mu_0} \underbrace{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{2(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2)} \\ &= -\frac{1}{c} \int d^4x \underbrace{\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}_{-\mathcal{L}_{FF}} \end{aligned} \quad (13.24)$$

Die Lagrangedichte der freien Felder ist also gerade mit der Energiedichte der elektromagnetischen Felder identisch. Es ist zu beachten, dass die Euler-Lagrange Gleichungen nur durch Variation der Eichfelder und nicht durch Variation der elektrischen und magnetischen Felder bestimmt werden kann.

## 13.8 Herleitung der Maxwellgleichungen

Die Wirkung für das Gesamtsystem ist die Summe der eichinvarianten Wirkung des Klein-Gordon Feldes und der Wirkung der freien Eichpotentiale.

### WIRKUNG DES KLEIN-GORDON FELDES UND DER EICHPOTENTIALE

$$\begin{aligned} S[\Psi, A^\mu] &= \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2m} [(i\hbar D_\mu \Psi)(i\hbar D^\mu \Psi)^* - m_0^2 c^2 \Psi \Psi^*] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu,\nu} F^{\mu,\nu} \right\} \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2m_0} (i\hbar \partial_\mu \Psi - q A_\mu \Psi)^* (i\hbar \partial^\mu \Psi - q A^\mu \Psi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_0 c^2}{2} \Psi^* \Psi - \frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right\} \end{aligned} \quad (13.25)$$

Dies ist eine kleine Weltformel, weil sie eine Welt aus klassischen Feldern mit einer Wechselwirkung komplett beschreibt.

Die Euler-Lagrange Gleichungen führen uns direkt auf die Maxwellgleichungen und, mit Hilfe des quantenmechanischen Korrespondenzprinzips, auf die Lorentzkraft.

Wir bestimmen die Bewegungsgleichungen der Eichpotentiale als Euler-Lagrange Gleichung entsprechend Gl. 11.8. durch Variation der Eichpotentiale

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\delta S}{\delta A_\mu} &= \frac{\partial \ell}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\nu,\mu} - \frac{q}{2m} [\Psi^* (i\hbar \partial^\nu \Psi - q A^\nu \Psi) + (i\hbar \partial^\nu \Psi - q A^\nu \Psi)^* \Psi] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\nu,\mu} - \frac{q}{2m} [\Psi^* (i\hbar D^\nu \Psi) + (i\hbar D^\nu \Psi)^* \Psi] \\
 &\stackrel{\text{Gl. 13.22}}{=} \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\nu,\mu} - j^\mu
 \end{aligned}$$

wobei Gl. 13.22 für die Viererstromdichte verwendet wurde. Wir erhalten also die Bewegungsgleichungen für die Eichfelder

$$\partial_\mu F^{\mu,\nu} = \mu_0 j^\nu,$$

Es wurde bereits gezeigt, dass diese Gleichungen mit den Maxwellgleichungen Gl. 11.15 von S. 159 identisch sind.

## 13.9 Herleitung der Lorentzkraft

Zunächst bestimmen wir die Euler-Lagrange Gleichungen Gl. 11.8 für die Felder aus der Wirkung Gl. 13.25.

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\delta S}{\delta \Psi^*} &= \frac{\partial \ell}{\partial \Psi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \Psi^*)} \\
 &= -\frac{m_0 c^2}{2} \Psi + \frac{1}{2m_0} (i\hbar \partial^\mu \Psi - q A^\mu \Psi) (-q A_\mu) - \frac{1}{2m_0} \partial_\mu (i\hbar \partial^\mu \Psi - q A^\mu \Psi) (-i\hbar) \\
 &= \frac{1}{2m_0} (i\hbar \partial_\mu - q A_\mu) (i\hbar \partial^\mu - q A^\mu) \Psi - \frac{m_0 c^2}{2} \Psi
 \end{aligned}$$

Dies ist die Klein-Gordon Gleichung in elektromagnetischen Feldern.

### Zurück zum Teilchenbild

Nun können wir direkt das Korrespondenzprinzip anwenden. Das Korrespondenzprinzip beschreibt den Übergang von klassischer Mechanik und der Quantenmechanik. Das Klein-Gordon Feld ist eine quantenmechanische Wellenfunktion. Um wieder in das Teilchenbild zu gelangen müssen wir die Wellengleichung Gl. 13.26 wieder in eine klassische Hamiltonfunktion umwandeln. Das Korrespondenzprinzip lautet

$$\begin{aligned}
 E = \hbar \omega &\leftrightarrow i\hbar \partial_t \\
 \vec{p} = \hbar \vec{k} &\leftrightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}
 \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in kovarianter Schreibweise wie folgt zusammenfassen<sup>8</sup>

$$p^\mu = \hbar k^\mu \leftrightarrow i\hbar \partial^\mu \quad (13.26)$$

<sup>8</sup>Beachte, dass  $\partial^\mu \triangleq (\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla})$

Die Grundlage des Korrespondenzprinzips folgt aus dem Ehrenfest Theorem, bzw der WKB Näherung. Eine Eselsbrücke ist die folgende Überlegung: Betrachte ein Wellenpaket mit einem Wellenanteil  $\Psi = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = e^{-ik_\mu x^\mu}$  und setze sie in die Wellengleichung ein.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \partial_\mu - qA_\mu \right) \left( \frac{\hbar}{i} \partial^\mu - qA^\mu \right) e^{-ik_\mu x^\mu} - \frac{m_0 c^2}{2} e^{-ik_\mu x^\mu} \\ &= e^{-ik_\mu x^\mu} \left[ \frac{1}{2m} (-\hbar k_\mu - qA_\mu) (-\hbar k^\mu - qA^\mu) - q \frac{\hbar}{i} (\partial_\mu A^\mu) - \frac{m_0 c^2}{2} \right] \\ &= e^{-ik_\mu x^\mu} \left[ \frac{1}{2m} (p_\mu + qA_\mu) (p^\mu + qA^\mu) - q \frac{\hbar}{i} (\partial_\mu A^\mu) - \frac{m_0 c^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Wir dividieren durch die Wellenfunktion, die immer ungleich Null ist und erhalten die Beziehung

$$\frac{1}{2m} (p_\mu - qA_\mu) (p^\mu - qA^\mu) - q \frac{\hbar}{i} (\partial_\mu A^\mu) - \frac{m_0 c^2}{2} = 0$$

Nun bilden wir den Grenzübergang  $\hbar \rightarrow 0$ , während wir die Energie und Impuls konstant halten. Letzteres bedeutet, dass Frequenz und Wellenvektor unendlich werden. In diesem Limes erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{2m} (p_\mu - qA_\mu) (p^\mu - qA^\mu) - \frac{m_0 c^2}{2} = 0$$

welche eine Art lokale Dispersionsrelation ist, da sie Energie und Impulse miteinander verknüpft.

Wir zerlegen die Vektoren in zeitartige und raumartige Komponenten und lösen nach der Energie auf, was uns die Hamiltonfunktion liefert.

$$\begin{aligned} (p_\mu - qA_\mu) (p^\mu - qA^\mu) - m_0^2 c^2 &= 0 \\ \frac{1}{c^2} (E - q\Phi)^2 - (\vec{p} - q\vec{A})^2 - m_0^2 c^2 &= 0 \\ E = H(\vec{r}, \vec{p}, t) &= \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + (\vec{p} - q\vec{A})^2 c^2} + q\Phi \end{aligned} \quad (13.27)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der Hamiltonfunktion eines relativistischen Teilchens, wie wir ihn in Gl. 12.16 auf S. 174 erhalten haben. Allerdings haben wir ihn hier für den klassischen Grenzfall des Klein-Gordon Feldes erhalten.

### Bewegungsgleichungen

Die Energie ist gleichzeitig die Hamiltonfunktion, sodass wir die Bewegungsgleichung nun aus den Hamiltonschen Gleichungen (siehe  $\Phi$ SX:Klassische Mechanik) bestimmen können.

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} \quad (13.28)$$

Wir stellen nun die Hamiltonschen Gleichungen für die oben erhaltene Hamiltonfunktion auf.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\nabla}_p H \stackrel{\text{Gl. 13.27}}{=} \pm \frac{(\vec{p} - q\vec{A})c^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + (\vec{p} - q\vec{A})^2 c^2}} \quad (13.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= -\vec{\nabla}_r H \stackrel{\text{Gl. 13.27}}{=} \pm \frac{q(\vec{\nabla} \otimes \vec{A})(\vec{p} - q\vec{A})c^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + (\vec{p} - q\vec{A})^2 c^2}} - q\vec{\nabla}\Phi \\ &= q(\vec{\nabla} \otimes \vec{A})\dot{\vec{r}} - q\vec{\nabla}\Phi \end{aligned} \quad (13.30)$$



Dabei ist  $\otimes$  das Symbol für das dyadische Produkt.

Wir gehen von der ersten Hamiltonschen Gleichung aus und lösen sie nach den Impulsen auf. Anschließend leiten wir die Impulse nach der Zeit ab und setzen die Zeitableitung des Impulses mit dem in der zweiten Hamiltonschen Gleichung gleich.

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{r}} &= \pm \frac{(\vec{p} - q\vec{A})c^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + (\vec{p} - q\vec{A})^2 c^2}} \\
 \Rightarrow \quad m_0^2 c^4 \dot{\vec{r}}^2 + (\vec{p} - q\vec{A})^2 c^2 \dot{\vec{r}}^2 &= (\vec{p} - q\vec{A})^2 c^4 \\
 \Rightarrow \quad (\vec{p} - q\vec{A})^2 &= \left( \frac{m_0 \dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \right)^2 \\
 (\vec{p} - q\vec{A}) \parallel \dot{\vec{r}} \quad (\vec{p} - q\vec{A}) &= \pm \left( \frac{m_0 \dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \right) \\
 \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} &= \pm \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \right) + q \frac{d\vec{A}(\vec{r}(t), t)}{dt} \quad (13.31)
 \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir verwendet, dass  $\vec{p} - q\vec{A}$  und die Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$  parallel sind, was aus der ersten Hamiltonschen Gleichung Gl. 13.29 folgt.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \pm \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \right) &= \overbrace{q(\vec{\nabla} \otimes \vec{A})\dot{\vec{r}} - q\vec{\nabla}\Phi}^{\dot{\vec{p}} \text{ Gl. 13.30}} - q \frac{d\vec{A}(\vec{r}(t), t)}{dt} \\
 &= q \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{A})\dot{\vec{r}} - \vec{\nabla}\Phi - (\dot{\vec{r}}\vec{\nabla})\vec{A} - \dot{\vec{A}} \right] \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \dot{\vec{r}}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \right) &= \pm q \left[ \sum_j \partial_i A_j \dot{r}_j - \partial_i \Phi - \sum_j \dot{r}_j \partial_j A_i - \dot{A}_i \right] \\
 &= \pm q \left[ \underbrace{-\partial_i \Phi - \dot{A}_i}_{E_i} + \underbrace{\sum_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \dot{r}_j}_{\times \text{ Gl. 13.32}} \right] \\
 &= \pm q \left[ E_i + \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i}_X \right]
 \end{aligned}$$

Dies ist gerade das Kraftgesetz Gl. 11.13 auf S. 158 für relativistische geladene Teilchen mit der Lorentzkraft, die identisch mit dem Ausdruck Gl. 3.7. auf S 26 ist, den wir damals als Postulat angenommen haben.

Das positive Vorzeichen gilt für die Teilchen, während das negative Vorzeichen für die Antiteilchen gilt. Man sieht also, dass die Ladung der Antiteilchen gerade das umgekehrte Vorzeichen besitzt.

Hier noch eine Nebenrechnung für den Term  $X$

$$\begin{aligned}
 X &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \dot{r}_j \\
 &\hat{=} \begin{pmatrix} 0 & \partial_x A_y - \partial_y A_x & \partial_x A_z - \partial_z A_x \\ \partial_y A_x - \partial_x A_y & 0 & \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z & \partial_z A_y - \partial_y A_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}{=} \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_z \dot{y} - B_y \dot{z} \\ -B_z \dot{x} + B_x \dot{z} \\ B_y \dot{x} - B_x \dot{y} \end{pmatrix} \\
 &= \dot{\vec{r}} \times \vec{B}
 \end{aligned} \tag{13.32}$$

# Chapter 14

## Epilog

Damit haben wir den Kreis geschlossen und sind wieder bei den Maxwellgleichungen und der Lorentzkraft angelangt.

Zu Beginn haben wir die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft also Postulate der Elektrodynamik angenommen. Wir haben anhand der Elektrostatik gezeigt, wie die Maxwellgleichungen aus experimentellen Beobachtungen gewonnen wurden. Die grundlegenden Experimente sind im Coulomb Gesetz und im Gesetz von Biot und Savart zusammengefasst, welche die Kräfte zwischen geladenen Teilchen beschreiben.

Wir haben beobachtet, dass Maxwellgleichungen die Lorentzsymmetrie besitzen. Die Lorentzsymmetrie war der Ausgangspunkt für die Wirkung von Pfaden und Eichpotentialen. Dazu haben wir die wahrscheinlich einfachste Wirkung aufgestellt, die Pfade mit Vektorfeldern verknüpft und Lorentz-invariant ist. Es wurde gezeigt, dass diese Wirkung die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft beschreibt. Damit haben wir diese beiden Gleichungen auf eine fundamentalere Basis gestellt. Die Maxwellgleichungen sind nun nicht mehr Postulate: Die Postulate sind nun das Wirkungsprinzip und die Form der Wirkung. Aus ihnen werden Maxwellgleichungen und die Bewegungsgleichungen der Teilchen abgeleitet.

Schließlich haben wir gezeigt, wie diese Wirkung zwangsläufig aus der Lorentzsymmetrie und aus der lokalen Eichinvarianz folgt. Dies haben wir anhand eines einfachen komplexwertigen, aber skalaren Feldes gezeigt. Wiederum wurden die Postulate durch grundlegendere ersetzt. Wiederum fordern wir ein Wirkungsprinzip für Felder. Neben der Lorentzsymmetrie und der Eichsymmetrie wurde nun nur noch gefordert, dass die Felder nur quadratisch in die Wirkung eingehen. Damit haben wir die Elektrodynamik im Wesentlichen auf Postulate von Symmetrien zurückgeführt. Das Prinzip, das hier anhand eines skalaren Feldes demonstriert wurde, lässt sich analog auf andere Vektorfelder wie das Dirac-Feld, welches Elektronen und Positronen beschreibt, übertragen.

Dadurch wurde die fundamentale Rolle von Symmetrien für unser Weltbild verdeutlicht.

Die elektrischen und magnetischen Felder wurden zunächst als Hilfsgrößen eingeführt. Mit Hilfe des Noethertheorems haben wir diesen Feldern selber eine Energie und ein Impuls zuordnen können, wodurch sie eine Art Realität erhalten haben. Später haben wir die Eichpotentiale eingeführt, um die Gleichungen weiter zu vereinfachen, wiederum als reine Hilfsgrößen. Diese wurden nun zur Grundlage der Beschreibung, obwohl sie nicht direkt beobachtbar sind. Schließlich haben wir selbst die Teilchen durch ein Feld, das Klein-Gordon Feld ersetzt. Damit haben wir Kontakt mit der Quantenmechanik aufgenommen, da das Klein-Gordon Feld der quantenmechanischen Wellenfunktion eines Teilchens entspricht. Die Wellenpakete des Klein-Gordon Feldes verhalten sich gerade wie klassische Teilchen, wenn das Potential sich auf der Längenskala der Wellenlänge des Klein-Gordon Feldes nur wenig ändert. Sowohl die Teilchen als auch deren Wechselwirkung werden nun durch Felder beschrieben, die direkt gar nicht beobachtbar sind. Dennoch lässt sich deren Existenz experimentell bestätigen.

Das Noethertheorem hat uns den Ursprung von so fundamentalen Größen wie Energie und Impuls verdeutlicht.

Wir haben wichtige Werkzeuge kennengelernt, beziehungsweise weiterentwickelt. Dazu gehören Greensfunktionen, Fouriertransformationen, Kugelflächenfunktion, sowie die kovariante Vektornotation.

Greensfunktionen tauchen immer wieder auf, auch wenn der Zusammenhang mit den Greensfunktionen nicht immer hergestellt wird. Sie spielen eine besondere Rolle in der Quantenfeldtheorie, auf der, zusammen mit der Allgemeinen Relativitätstheorie, unser Weltbild fußt.

Kugelflächenfunktionen spielen eine bedeutende Rolle bei der Beschreibung der chemischen Bindung und z.B. bei optischen Anregungen.

Die kovariante Vektornotation erlaubt es schiefwinklige Koordinatensysteme zu beschreiben, und bereitet auf die Diracsche Bracket-Schreibweise der Quantenmechanik vor. Sie ist wichtig in der Elastizitätstheorie und ganz besonders bei der Allgemeinen Relativitätstheorie, bei der nicht nur schiefwinklige Koordinaten, sondern auch gekrümmte Räume beschrieben werden.

## Appendix A

# Klassisches Teilchen im Elektromagnetischen Feld

### A.1 Wirkungsprinzip für Teilchen im Elektromagnetischen Feld

Hier werden wir die nichtrelativistischen Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld bestimmen. Dies verbindet die Lagrange Funktion mit dem Ausdruck der Lorentz Kraft.

Eine relativistische Behandlung des gleichen Problems wurde bereits durchgeführt. Hier behandeln wir das Problem in der vertrauteren nichtrelativistischen Grundlage. Dieses Kapitel dient unter anderem dazu die Konsistenz der Vorzeichen in den wesentlichen Gleichungen zu überprüfen. Das letzte Problem ergab sich dadurch, dass viele Gleichungen für Elektronen geschrieben werden und das Symbol für die (positive) Elementarladung für die negative Elektronenladung eingesetzt wird.

Die Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld ist

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\vec{v}\vec{A}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.1})$$

wobei  $\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{r}}$  die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Dieser Ausdruck lässt sich als nichtrelativistischer Grenzfall aus Gl. 11.3 herleiten, wenn man den Term mit den freien Feldern weglässt.

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \\ &\stackrel{\text{Gl. A.1}}{=} \frac{d}{dt} [mv_i + qA_i] + q\nabla_i \Phi - q \sum_j v_j \nabla_i A_j \\ &= m\dot{v}_i + q\partial_t \vec{A}_i + q \sum_j v_j \nabla_j A_i + q\nabla_i \Phi - q \sum_j v_j \nabla_i A_j \\ &= m\ddot{r}_i + q[\nabla_i \Phi + q\partial_t \vec{A}_i] + q \sum_j \dot{r}_j [\nabla_j A_i - \nabla_i A_j] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dieser Ausdruck sieht noch nicht sehr ansehnlich aus...

Um ihn zu vereinfachen, betrachte  $\sum_j \dot{r}_j \nabla_j A_i - \sum_j \nabla_i A_j \dot{r}_j$  und nutze die "bac-cab" regel  $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} =$

$$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

$$\begin{aligned} \left[ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right]_i &= \left[ \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \right]_i \\ &= \sum_j a_j c_j b_i - a_j b_j c_i = \sum_j a_j [b_i c_j - b_j c_i] \\ \left[ \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_j &= - \sum_i \dot{r}_i [\nabla_j A_i - \nabla_i A_j] \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in die Euler-Lagrange Gleichungen Gl. A.2 ein, erhalten wir die Bewegungsgleichungen in der bekannten Form

$$m\ddot{\vec{r}} = q[-\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi] + q\dot{\vec{r}} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = q\vec{E} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

Daraus lesen wir sofort den Ausdruck für die Lorentz Kraft ab

$$\vec{F} = q \left[ \vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right]$$

Benutzt wurde  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  und  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}$

## A.2 Nichtrelativistischen Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im elektrodynamischen Feld

Die Hamiltonfunktion spielt insbesondere in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle, weil sich daraus die Schrödingergleichung direkt konstruieren lässt.

Um aus der Lagrangefunktion Gl. A.1 die Hamiltonfunktion abzuleiten benötigen wir die Definition der Hamiltonfunktion  $H(\vec{p}, \vec{r})$  und des kanonischen Impulses  $\vec{p}$

$$\begin{aligned} H(\vec{p}, \vec{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ \vec{p} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} \end{aligned}$$

Zunächst drücken wir die Geschwindigkeit als Funktion der Position und des Impulses aus.

$$\begin{aligned} \vec{p} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} = m\vec{v} + q\vec{A} \\ \Rightarrow \vec{v} &= \frac{1}{m} (\vec{p} - q\vec{A}) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H(\vec{p}, \vec{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ &\stackrel{\text{Gl. A.1}}{=} \vec{p}\vec{v} - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\Phi(\vec{r}, t) - q\vec{v}\vec{A}(\vec{r}, t) \\ &= (\vec{p} - q\vec{A})\vec{v} - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\Phi(\vec{r}, t) \\ &= \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

NICHTRELATIVISTISCHE HAMILTONFUNKTION EINES TEILCHENS IM  
ELEKTROMAGNETISCHEN FELD

$$H(\vec{p}, \vec{r}, t) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi(\vec{r}, t) \quad (\text{A.3})$$

Man erkennt hier eine Regel, die sehr allgemein ist, und die es erlaubt das elektromagnetische Feld an ein Teilchen anzukoppeln. Wir gehen dazu von der Dispersionsrelation eines freien Teilchens aus, nämlich

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Nun führen wir die folgende Ersetzung durch, die minimale Kopplung genannt wird

MINIMALE KOPPLUNG

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E - q\Phi(\vec{r}, t) \\ \vec{p} &\rightarrow \vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

dann erhalten wir die Gleichung

$$E = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi$$

die mit dem oben hergeleiteten Ausdruck Gl. A.3 für die Hamiltonfunktion identisch ist.

Schließlich bestimmen wir die Bewegungsgleichung noch einmal, aber nun unter Verwendung der Hamiltonschen Gleichungen.

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial r_i} \end{aligned}$$

Mit unserer Hamiltonfunktion erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \stackrel{\text{Gl. A.3}}{=} \frac{1}{m}(p_i - qA_i) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial r_i} \stackrel{\text{Gl. A.3}}{=} -\frac{1}{m} \sum_j (p_j - qA_j) (-q\partial_i A_j) - q\partial_i \Phi \\ &= q \sum_j \underbrace{\frac{1}{m}(p_j - qA_j)}_{\partial_t r_j} \partial_i A_j - q\partial_i \Phi \end{aligned}$$

Wir bilden die Zeitableitung der ersten Hamiltonschen Gleichung und setzen anschließend die

zweite ein. Dies führt uns auf die Lorentz Kraft.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\vec{r}}_i &= \dot{\vec{p}}_i - q \sum_j \dot{\vec{r}}_j \partial_j A_i - q \partial_t A_i \\
 &= q \sum_j \dot{\vec{r}}_j \partial_j A_i - q \partial_t \Phi - q \sum_j \dot{\vec{r}}_j \partial_j A_i - q \partial_t A_i \\
 &= q \left[ \underbrace{-\partial_j \phi - \partial_t A_i}_{E_i} + \sum_j \dot{\vec{r}}_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \right] \\
 &= q \left[ E_i + \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} \dot{\vec{r}}_j \vec{B}_k \right]
 \end{aligned}$$

### A.3 Hamiltonfunktion und Hamiltonsche Gleichungen

Der **kanonische Impuls** ist als

$$p_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i}$$

definiert. Beachte, dass der kanonische Impuls nicht generell über  $\vec{p} = m\vec{v}$  mit der Geschwindigkeit verknüpft ist.

Der relativistische Impuls ist als

$$p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{dx_\mu}{dt})}$$

definiert.

Mit der relativistischen Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = -m_0 c \sqrt{\frac{dx_\mu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt}} - q A_\mu \frac{dx^\mu}{dt}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
 p^\mu &= -m_0 c \left( \frac{dx_\mu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} \right)^{-\frac{1}{2}} u^\mu - q A^\mu \\
 p^0 &= \frac{-m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} - q c \Phi \\
 \vec{p} &= \frac{-m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} - q \vec{A}
 \end{aligned}$$

So erhalten wir den kanonischen Impuls eines Teilchens im elektromagnetischen Feld als

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \quad (\text{A.4})$$

Beachte den Unterschied zwischen kanonischem und kinetischem Impuls

- kanonischer Impuls  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + q\vec{A}_i$
- kinetischer Impuls  $m\dot{\vec{r}} = p_i - q\vec{A}_i$



Die Energie, bzw. die **Hamiltonfunktion** ist als

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

definiert. Dabei müssen wir die Definitionsgleichung für den kanonischen Impuls nach den Geschwindigkeiten aufgelöst und  $\dot{\vec{r}}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A})$  eingesetzt.

Entsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = [m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}] \dot{\vec{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\Phi(\vec{r}) - q\dot{\vec{r}}\vec{A} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\Phi \\ &= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi\end{aligned}$$

Wichtig: Das Vektorpotential geht sowohl linear als auch quadratisch ein. Eine Eichtransformation ändert beide Teile. Eine Störungsentwicklung in  $A$  ist nicht eindeutig.

Hamilton'sche Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i} = +\frac{q}{m} \sum_j \nabla_i A_j (p_j - qA_j) - q\nabla_i \Phi \\ &= +\frac{q}{m} \sum_j \nabla_i A_j p_j - \frac{q^2}{m} \nabla_i (\vec{A})^2 - q\nabla_i \Phi \\ \dot{r}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{1}{m} (p_i - qA_i)\end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion wird häufig wie folgt in seine Teile zerlegt:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \\ &= \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{p}\vec{A}}_{\mathcal{H}_{para}} + \underbrace{\frac{q^2}{2m}\vec{A}^2}_{\mathcal{H}_{dia}} + q\Phi\end{aligned}$$

dabei heißt  $\mathcal{H}_{para}$  der **paramagnetische Anteil** und  $\mathcal{H}_{dia}$  der **diamagnetische Anteil** der Hamiltonfunktion. Es ist allerdings zu beachten, dass die Aufteilung aufgrund der Eichinvarianz nicht eindeutig ist.

Um die Bedeutung der beiden Anteile herauszustellen, betrachten wir ein Elektron in einem Atom und einem homogenes Magnetfeld  $\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) \\ \mathcal{H}_{para} &= -\frac{q}{m}\vec{p}\vec{A} = -\frac{q}{2m}\vec{p}(\vec{B} \times \vec{r}) = -\frac{q}{2m}\vec{B}(\vec{r} \times \vec{p}) = -\frac{q}{2m}\vec{B}\vec{L} \\ \mathcal{H}_{dia} &= +\frac{q^2}{2m}\vec{A}^2 = +\frac{q^2}{4m}[\vec{B}^2\vec{r}^2 - (\vec{B}\vec{r})^2]\end{aligned}$$

- Der Bahndrehimpuls stellt sich parallel zum Magnetfeld ein.
- Wenn das Elektron einen festen Bahndrehimpuls hat, dann ist der Energieunterschied zwischen paralleler und antiparalleler Ausrichtung  $\Delta E = \frac{q}{m}|B||L|$ . Dieser sogenannte **Zeemann effekt** erlaubt die experimentelle Bestimmung des Bahndrehimpulses.
- der paramagnetische Term stabilisiert Teilchen in einem Magnetfeld.
- der diamagnetische Term erhöht die Energie, wenn sich das Teilchen von der Achse durch den Kern parallel zum Magnetfeld entfernt (Achtung Eichinvarianz)
- der diamagnetische Term ist drehimpulsunabhängig und verdrängt Elektronen aus dem Magnetfeld.

## A.4 Noethertheorem für klassische Felder

Man betrachte eine Transformation, die von einem Parameter  $\epsilon$  abhängt

$$\begin{aligned}x'_i(\vec{x}, \epsilon) &= x_i + \frac{\partial x'_i}{\partial \epsilon} \epsilon + O(\epsilon^2) =: x_i + u_i(\vec{x}) + O(\epsilon^2) \\ \Phi'(\vec{x}, \epsilon) &= \Phi(\vec{x}) + \frac{\partial \Phi(\vec{x})}{\partial \epsilon} \epsilon + O(\epsilon^2) =: \Phi(\vec{x}) + \delta\Phi(\vec{x}) + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Dabei kombinieren wir Orts und Zeitkoordinaten in einen vierdimensionalen Vektor mit Komponenten  $x_t = t$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . Dieser ist nicht mit dem kovarianten Vektor aus der Relativitätstheorie zu verwechseln.

Als Beispiel für eine solche Transformation betrachten wir die Verschiebung in Richtung  $\vec{a}$ .

$$\begin{aligned}x'_i(\vec{x}, \epsilon) &= x_i + a_i \epsilon \\ \Phi'(\vec{x}, \epsilon) &= \Phi(\vec{x} - \vec{a}\epsilon) = \Phi(x) - \underbrace{\vec{a}_i \epsilon \vec{\nabla}_i \Phi}_{\delta\Phi(x)} + O(\epsilon)^2\end{aligned}$$

### Editor: Hier eine Figur

Um das Noethertheorem abzuleiten, verlangen wir, dass die Wirkung unter der Symmetrietransformation invariant bleiben muss. Dies muss für alle Felder, also nicht nur für die physikalischen, gelten. Wir fordern also

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^N x \mathcal{L}(\Phi', \vec{\nabla} \Phi', \vec{x}) - \int_{\Omega} d^N x \mathcal{L}(\Phi, \vec{\nabla} \Phi, \vec{x}) = 0$$

Beachte dabei, dass sich auch die Randbedingungen unter der Symmetrietransformation ändern. Deshalb wird das eine Integral über das transformierte Volumen  $\Omega'$  und das andere über das untransformierte Volumen  $\Omega$  ausgeführt.

Wir teilen die Änderung in zwei Teile: der eine berücksichtigt die Änderung des Feldes  $\Phi$  und der andere die Änderung des Volumens  $\Omega$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega'} d^N x \mathcal{L}(\Phi', \vec{\nabla} \Phi', \vec{x}) - \int_{\Omega'} d^N x \mathcal{L}(\Phi, \vec{\nabla} \Phi, \vec{x}) \\ &\quad + \int_{\Omega'} d^N x \mathcal{L}(\Phi, \vec{\nabla} \Phi, \vec{x}) - \int_{\Omega} d^N x \mathcal{L}(\Phi, \vec{\nabla} \Phi, \vec{x}) \\ &= \int_{\Omega'} d^N x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \delta \nabla_i \Phi + O(\epsilon^2) \right] \\ &\quad + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \vec{u} \mathcal{L}(\Phi, \vec{\nabla} \Phi, \vec{x})}_{= \int_{\Omega} d^N x \vec{\nabla}(\vec{u} \mathcal{L})} + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im ersten Term eine Taylorentwicklung durchgeführt und im zweiten Teil die Änderung des Volumens durch ein Oberflächenintegral über die Oberfläche  $\partial\Omega$  des Volumens  $\Omega$  ausgedrückt. Letzteres kann mit Hilfe des Gauß Theorems wieder in ein Volumenintegral umgewandelt werden. Da der Unterschied von  $\Omega$  und  $\Omega'$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  proportional zu  $\epsilon$  verschwindet, können wir den Integranden auf die Werte auf dem Rand von  $\Omega$  beschränken, da wir nicht an quadratischen Termen in  $\epsilon$  interessiert sind.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\Omega'} d^N x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \delta \nabla_i \Phi + \vec{\nabla}(\bar{u} \mathcal{L}) \right] + O(\epsilon^2) \\
&= \int_{\Omega'} d^N x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \sum_i \nabla_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \delta \Phi \right) - \sum_i \delta \Phi \nabla_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \right) + \vec{\nabla}(\bar{u} \mathcal{L}) \right] + O(\epsilon^2) \\
&= \int_{\Omega'} d^N x \left\{ \delta \Phi \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \sum_i \nabla_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \right) \right]}_{\frac{\delta S}{\delta \Phi}} + \left[ \sum_i \nabla_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \delta \Phi + \bar{u}_i \mathcal{L} \right) \right] \right\} + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

Wenn die Transformation eine Symmetrietransformation ist, dann gilt  $\delta S = 0$  für alle Felder. Speziell gilt diese Bedingung auch für die physikalischen Felder. Für letztere verschwindet der erste Term und nur die Divergenz bleibt übrig.

Für die physikalischen Felder gilt also

$$0 = \int_{\Omega} d^N x \sum_i \nabla_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \underbrace{\frac{\partial \Phi'}{\partial \epsilon}}_{=\delta \Phi / \epsilon} + \underbrace{\frac{\partial x'_k}{\partial \epsilon} \mathcal{L}}_{u_k / \epsilon} \right] \epsilon$$

Wir erhalten also

$$\vec{\nabla} \vec{J} = 0 \quad \text{für} \quad J_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \frac{\partial \Phi'}{\partial \epsilon} + \frac{\partial x'_i}{\partial \epsilon} \mathcal{L} \quad (\text{A.5})$$

Die Gleichung  $\vec{\nabla} \vec{J} = 0$  hat gerade die Form eines differentiellen Erhaltungssatzes

$$\partial_t J_t + (\partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z) = 0$$

Der Term  $Q = \int d^3 r J_t(\vec{r}, t)$  wird häufig als verallgemeinerte Ladung bezeichnet und  $(J_x, J_y, J_z)$  als verallgemeinerte Stromdichte.

Unser Ausdruck für die Stromdichte hat noch keine geeignete Form. Wir würden gerne die Formänderungen der Wellenfunktion von den reinen Koordinatentransformationen trennen. Deshalb führen wir die absolute Ableitung von  $\Phi'(\vec{x}')$  nach  $\epsilon$  ein.

$$\frac{d}{d\epsilon} \Phi'(\vec{x}', \epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} \Phi'(\vec{x} + \epsilon \frac{d\vec{x}'}{d\epsilon} + O(\epsilon^2), \epsilon) = \frac{\partial \Phi'(\vec{x}, \epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \vec{x}'_i}{\partial \epsilon} \vec{\nabla}_i \Phi + O(\epsilon^2)$$

Durch Ersetzen in Gl. A.5 erhalten wir die Definition des Noetherstroms

**Definition A.1 NOETHERSTROM**

$$J_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \frac{d\Phi'(\vec{x}')}{d\epsilon} - \sum_j \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_i \Phi} \nabla_j \Phi - \mathcal{L} \delta_{ij} \right]}_{\text{Energie-Impulstensor}} \frac{\partial x'_j}{\partial \epsilon} \quad (\text{A.6})$$

Der erste Term in der Definition des Noetherstroms verschwindet zum Beispiel bei Drehungen und Verschiebungen, weil sich die Form des Feldes nicht ändert. Wir können uns daher auf den zweiten Term beschränken.

## A.5 Coulombeichung

**Definition A.2** COULOMB EICHUNG

$$\nabla \vec{A} = 0 \quad (\text{A.7})$$

In der Coulombeichung vereinfacht sich die erste Gleichung zur Poissongleichung

$$\begin{aligned} \left[ \vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi \right] + \partial_t \left[ \vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right] &= -\frac{1}{\epsilon} \rho \\ \Rightarrow \nabla^2 \Phi &= -\frac{1}{\epsilon} \rho \end{aligned}$$

für die wir als Lösung

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{A.8})$$

Es scheint als ob das Potential nur von der momentanen Ladungsdichte abhängt. Eine Änderung der Ladungsdichte scheint sich unmittelbar im ganzen Universum bemerkbar zu machen. Dies widerspricht einer Aussage der Relativitätstheorie, dass Signale sich maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten dürfen. Es ist allerdings zu beachten, dass das elektrische Feld wegen  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A}$  nicht alleine aus dem Potential bestimmt werden kann. Die beiden Anteile kompensieren sich derart, dass die elektrischen Felder retardiert reagieren, wie es die Relativitätstheorie fordert.

Die zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left[ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} \right] - \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right] &= -\mu \vec{j} \\ \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} &= -\mu \vec{j} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \partial_t \Phi \\ &\stackrel{\text{Gl. A.8}}{=} -\mu \vec{j} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \partial_t \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\stackrel{\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}{=} -\mu \vec{j} - \frac{\mu}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3 r' \frac{[\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir<sup>1</sup>

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = -\mu \underbrace{\left[ \vec{j}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \int d^3 r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]}_{\vec{j}_t} \quad (\text{A.9})$$

Die Gleichungen für das elektrostatische Potential und das Vektorpotential sind mit Hilfe der Coulombeichung entkoppelt worden.  $\vec{j}_t$  wird die transversale Stromdichte genannt.

Es ist wichtig zu beachten, dass diese Lösung auch die Coulombeichung  $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$  erfüllen muss! Dies ist außer in Spezialfällen nichttrivial! Es ist zu beachten, dass die Coulombeichung eine Einfachheit vorspiegelt, und die Komplexität erst beim genauen Hinsehen offenbart.

**Editor: Das folgende ist noch nicht fertig**

<sup>1</sup>Beachte, dass wir hier die Ladungserhaltung verwendet haben, obwohl wir sie noch nicht hergeleitet haben. Wir werden dies später mit Hilfe des Noethertheorems tun ohne auf die hier hergeleiteten Formen zurückzugreifen.

Wir suchen also eine Funktion  $\Delta\vec{A}$ , sodass  $\vec{A} + \vec{A}'$  sowohl die Bewegungsgleichung in der Coulombbeziehung als auch die Eichbedingung selber erfüllt. Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}' &= 0 \\ \vec{\nabla} \vec{A}' &= -\nabla \vec{A}\end{aligned}$$

Die Coulombbeziehung eignet sich in zwei Fällen, nämlich dem stationären Fall und den freien Feldern.

### A.5.1 Stationärer Fall

Von Interesse ist die Coulombbeziehung besonders im stationären Fall, weil dann die elektrischen und magnetischen Felder entkoppeln. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \Phi &= -\frac{1}{\epsilon} \rho \\ \vec{\nabla}^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \vec{\nabla} \vec{A} &= 0\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann wie folgt gelöst werden

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

Diese Lösung erfüllt die Coulombbeziehung automatisch, wenn die Strom- und Ladungsdichten stationär und im endlichen Raum lokalisiert sind.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \vec{A}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= - \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\stackrel{\text{part. Integrat. und Gau\ss}}{=} + \int d^3 r' \frac{1}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') - \int d\vec{A}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\stackrel{\text{Ladungserhaltung}}{=} - \int d^3 r' \frac{1}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \partial_t \rho(\vec{r}') - \int d\vec{A}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, da Stationarität gefordert wurde. Der zweite Term verschwindet, wenn die Stromdichte im Unendlichen, also auf der Oberfläche des Integrationsvolumens, verschwindet.

### A.5.2 Freie Felder

Bei den freien Feldern hat die Coulombbeziehung den Vorteil, dass das elektrische Potential gar nicht auftritt. Es sind also nur zwei Gleichungen zu lösen, nämlich

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \vec{A} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} &= 0\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Problems ist

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{A}(\vec{k}) \exp\left(i(\vec{k}\vec{r} - \omega_\sigma(\vec{k})t)\right) \\ \vec{k}\vec{A}(\vec{k}) &= 0 \\ \omega_\sigma(\vec{k}) &= \sigma c|\vec{k}|\end{aligned}$$

## A.6 Lorentz-eichung

Unabhängige Felder mit der Lorentz-eichung  $\vec{\nabla} A + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0$ .

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Bestimme Eichfunktion durch

$$\vec{\nabla}^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda = -\left(\vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi\right)$$

# **Mathematische Methoden**





# Appendix A

## Einheiten

### A.1 Rechnen mit Einheiten

Einheiten können am einfachsten in der folgenden Weise behandelt werden:

Man kann sich vorstellen, dass es nur eine Einheit gibt. Da es nur eine Einheit gibt, benötigt man dafür kein Symbol. Größen können über Umrechnungsfaktoren in diese abstrakte Einheit umgerechnet werden. In diesem Fall wäre dem Symbol  $m$  (Meter) eine Zahl zugeordnet. Dem Symbol  $s$  (Sekunde) wäre eine andere Zahl zugeordnet. Der Quotient  $\frac{m}{s}$  wäre demnach ein Umrechnungsfaktor der Zeiteinheit in die Längeneinheit. Dies scheint sinnlos, weil Zeit und Länge zwei unterschiedliche Größen sind. In Wirklichkeit sind Zeit und Länge gar nicht voneinander zu trennen, weil sie in der Relativitätstheorie einfach als unterschiedliche Richtungen eines vierdimensionalen Raumes behandelt werden. Dort wo die Trennung tatsächlich keinen Sinn macht könnten wir die zumindest formal eine solche Beziehung angeben.

Um einen Meter in eine andere Längeneinheit wie eine Zentimeter umzurechnen benötigen wir eine weitere Größe, nämlich den Umrechnungsfaktor  $\frac{m}{cm} = 100$ .  $1m = 1\frac{m}{cm}cm = 100cm$ . Die Umrechnung kann auch den Ursprung verändern. Zum Beispiel ist  $x_C = x - 273.15K$

### A.2 SI einheiten

Einheiten spielen noch die Rolle, dass sie die Art der Größe beschreiben. Sie sagen uns zum Beispiel, dass es sich bei der Größe  $1m$  um eine Länge handelt. Im international anerkannten SI system hat man sich auf 7 Grundeinheiten geeinigt, auch wenn sie zum Beispiel in den USA noch nicht umgesetzt sind, und darüber hinaus viele Fachgebiete noch andere Einheitensysteme verwenden.

- Länge: Meter (m)
- Zeit: Sekunde (s)
- Strom: Ampere (A)
- Masse: Kilogramm (kg)
- Temperatur: Kelvin (K)
- Lichtstarke: Candela (Cd)
- Substanzmenge: Mol

Darüber hinaus gibt es zusammengesetzte Einheiten wie die Energieeinheit Joule:  $1J = 1kg\frac{m^2}{sec^2}$ . Für eine Einheit lassen sich Größen miteinander vergleichen. Zum Beispiel können wir sagen, dass

$5J$  mehr sind als  $1J$ . Wir sollten aber nicht sagen, dass  $5m$  mehr sind als  $1J$ , da es sich um ganz unterschiedliche Dinge handelt.

Im SI System sind die Einheiten weitgehend willkürlich festgelegt. Andere Einheiten ziehen fundamentale, messbare Größen zu Rate, um die Einheiten in Beziehung zu setzen. Zum Beispiel gibt es die Hartree atomaren Einheiten, bei denen die Einheiten durch  $e = m_e = \hbar = 4\pi\epsilon_0 =: 1a.u.$  festgelegt sind. Im Grunde muss man für jede neu Art einer Größe einen Umrechnungsfaktor festlegen, sodass wir jede Größe mit jeder anderen vergleichen können. Da die Umrechnungsfaktoren beliebig gewählt werden können sollte man Größen mit unterschiedlichen Einheiten dennoch nicht miteinander vergleichen.

## Faktoren

| Faktor    | Name  | Prefix | Faktor     | Name  | Prefix |
|-----------|-------|--------|------------|-------|--------|
| $10^{24}$ | yotta | Y      | $10^{-1}$  | deci  | d      |
| $10^{21}$ | zetta | Z      | $10^{-2}$  | centi | c      |
| $10^{18}$ | exa   | E      | $10^{-3}$  | milli | m      |
| $10^{15}$ | peta  | P      | $10^{-6}$  | micro | $\mu$  |
| $10^{12}$ | tera  | T      | $10^{-9}$  | nano  | n      |
| $10^9$    | giga  | G      | $10^{-12}$ | pico  | p      |
| $10^6$    | mega  | M      | $10^{-15}$ | femto | f      |
| $10^3$    | kilo  | k      | $10^{-18}$ | atto  | a      |
| $10^2$    | hecto | h      | $10^{-21}$ | zepto | z      |
| $10^1$    | deka  | da     | $10^{-24}$ | yocto | y      |

## A.3 Einheiten mechanischer Größen

|                   |                 |                            |
|-------------------|-----------------|----------------------------|
| Energie           | $[E]$           | $\text{kg m}^2/\text{s}^2$ |
| Impuls            | $[\vec{p}]$     | $\text{kg m/s}$            |
| Drehimpuls        | $[\vec{L}]$     | $\text{kg m}^2/\text{s}$   |
| Wirkung           | $[E]$           | $\text{kg m}^2/\text{s}$   |
| Lagrange Funktion | $[\mathcal{L}]$ | $\text{kg m}^2/\text{s}^2$ |
| Lagrange Dichte   | $[\mathcal{L}]$ | $\text{kg}/(\text{ms}^2)$  |
| Kraft             | $[\vec{F}]$     | $\text{kg m/s}^2$          |

## A.4 Einheiten elektromagnetischer Größen

|                       |                |  |
|-----------------------|----------------|--|
| Induktionskonst.      | $[\mu_0]$      | $(\text{kg m})/(\text{A}^2\text{s}^2)$   |
| Dielektrizitätskonst. | $[\epsilon_0]$ | $(\text{A}^2\text{s}^4)/(\text{kg m}^3)$ |
| Ladung                | $[q]$          | A s                                      |
| Strom                 | $[I]$          | A  |
| Ladungsdichte         | $[\rho]$       | A s / m <sup>3</sup>                     |
| Stromdichte           | $[\vec{j}]$    | A / m <sup>2</sup>                       |
| Elektr. Feld          | $[\vec{E}]$    | $(\text{kg m})/(\text{A s}^3)$           |
| Magnet. Feld          | $[\vec{B}]$    | kg/(A s <sup>2</sup> )                   |
| Elektr. Potential     | $[\Phi]$       | $(\text{kg m}^2)/(\text{A s}^3)$         |
| Vektorpotential       | $[\vec{A}]$    | $(\text{kg m})/(\text{A s}^2)$           |
| Dielektr. Erregung    | $[\vec{D}]$    | A s / m <sup>2</sup>                     |
| Magnet. Erregung      | $[\vec{H}]$    | A/m                                      |
| Polarisation          | $[\vec{P}]$    | As/m <sup>2</sup>                        |
| Magnetisierung        | $[\vec{M}]$    | A/m                                      |

## A.5 Fundamentale Konstanten

Bei den Werten könnten sich Tippfehler eingeschlichen haben. Deshalb ist es besser mit der Quelle[11] oder anderen Referenzdaten[?] zu vergleichen.

|                                  |              |   |                                    |  |
|----------------------------------|--------------|---|------------------------------------|--|
| Pi                               | $\pi$        | = | 3.141 592 653 59                   |  |
| Euler Zahl                       | e            | = | 2.718 281 828 46                   |  |
| Induktionskonst. des Vakuums     | $\mu_0$      | = | $4\pi \cdot 10^{-7}$               | $(\text{kg m})/(\text{A}^2\text{s}^2)$   |
| Lichtgeschwindigkeit             | c            | = | $2.997\,924\,59 \cdot 10^8$        | m/s                                      |
| Dielektrizitätskonst. d. Vakuums | $\epsilon_0$ | = | 8.854 187 816 ...                  | $(\text{A}^2\text{s}^4)/(\text{kg m}^3)$ |
| Elementarladung                  | e            | = | $1.60217733(49) \cdot 10^{-19}$    | As                                       |
| g-Faktor des Elektrons           | $g_e$        | = | 2.001 319 304 386 (20)             |  |
| Elektronenmasse                  | $m_e$        | = | $9.109\,389\,7(54) \cdot 10^{-31}$ | kg                                       |
| Bohr Magneton                    | $\mu_B$      | = | $9.274\,015\,4(31) \cdot 10^{-24}$ | JT <sup>-1</sup>                         |



## Appendix B

# Vektorrechnung

### Definition B.1 SKALARPRODUKT

$$\vec{a}\vec{b} = \sum_{i,j} a_i b_i \quad (\text{B.1})$$

Diese Gleichung gilt nur wenn der metrische Tensor gleich der Einheitsmatrix ist, also in kartesischen Koordinaten.

### Definition B.2 KREUZPRODUKT

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} a_j b_k \quad (\text{B.3})$$

Dabei ist  $\epsilon_{i,j,k}$  der vollständig antisymmetrische Tensor definiert als  $\epsilon_{1,2,3} = \epsilon_{2,3,1} = \epsilon_{3,1,2} = 1$  und  $\epsilon_{3,2,1} = \epsilon_{2,1,3} = \epsilon_{1,3,2} = -1$ . Alle anderen Elemente sind gleich null.

Die Richtung des Kreuzprodukts ist durch die **rechte Hand Regel** gegeben. Man spreizt den Daumen in Richtung von  $\vec{a}$ , den Zeigefinger in Richtung  $\vec{b}$ , dann zeigt der Mittelfinger, senkrecht abgespreizt in Richtung  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ . Man nimmt dabei an, dass Daumen und Zeigefinger nicht weiter als 180 Grad gedehnt werden kann. Notfalls muss man die Hand umdrehen.

### Definition B.3 DYADISCHES PRODUKT

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$
$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{i,j} = a_i b_j \quad (\text{B.4})$$

**Definition B.4** *DIVERGENZ*

$$\vec{\nabla} \vec{a}(\vec{r}) \quad (\text{B.5})$$

**Editor: Dies muss überprüft werden!** Wenn das Vektorfeld  $\vec{a}(\vec{r})$  das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit ist, dann wurde sich ein Farbfleck in der Flüssigkeit proportional zur Divergenz vergrößern oder verkleinern.

**Definition B.5** *ROTATION*

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) \quad (\text{B.6})$$

Die Rotation kann auch als Wirbeldichte bezeichnet werden.

**Editor: Dies muss überprüft werden!** Wenn das Vektorfeld  $\vec{a}(\vec{r})$  das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit ist, dann würde sich ein Körper, der dieses Kraftfeld erfährt, drehen. Die Winkelgeschwindigkeit entspräche gerade der Rotation.

## Appendix C

# Nützliche Formeln für Vektoren

Dieser Teil wurde aus Jackson: Classical Electrodynamics abgeschrieben.

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \quad (\text{C.1})$$

$$\vec{\nabla}(\Psi\vec{a}) = (\vec{\nabla}\Psi)\vec{a} + \Psi(\vec{\nabla}\vec{a}) \quad (\text{C.2})$$

---

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{C.3})$$

---

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (\text{C.4})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}(\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a}(\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad (\text{C.5})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Psi) = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0 \quad (\text{C.7})$$

---

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \quad (\text{C.8})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{\nabla}\vec{c}) + (\vec{c}\vec{\nabla})\vec{b} - \vec{c}(\vec{\nabla}\vec{b}) - (\vec{b}\vec{\nabla})\vec{c} \quad (\text{C.9})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{c}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{c}) - \vec{\nabla}^2\vec{c} \quad (\text{C.10})$$

---

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}) \quad (\text{C.11})$$

Das doppelte Kreuzprodukt Gl. C.8 merkt man sich am besten als **“Back-Zap”** (bac-cab), was für  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$  steht.

Die Back-Zap Gleichungen mit einem Gradienten kann man sich aus der Back-Zap-Gleichung herleiten indem man mit einem oder mehreren Pfeilen anzeigt auf welche Vektoren der Gradient wirkt, und die Back-Zap Terme in einem weiteren Schritt so umordnet, dass die Terme durch Reihenfolge und Klammern auch ohne Pfeile eindeutig wird.





## Appendix D

# Differentialgeometrie

### D.1 Linienintegrale

Betrachte die Bahn eines Teilchens im 3-dimensionalen Raum. Wir stellen sie dar als Vektorfunktion  $\vec{r}(t)$ . Eine solche Funktion bildet einen eindimensionalen Raum, die  $t$ -Achse, in den 3-dimensionalen Raum ab. Wir können die Bahn auch ohne die Zeitinformation betrachten, sozusagen als Kondensstreifen des Teilchens. Die Bahn ist dann die Menge aller Punkte im 3-dimensionalen Raum, die erzeugt wird, wenn man alle Punkte der  $t$ -Achse mittels  $\vec{r}(t)$  in den 3-dimensionalen Raum abbildet.

Typische Probleme sind die nach der Weglänge oder die nach der Arbeit, die durch ein Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  im 3D Raum an dem Teilchen verrichtet wurde. Im Fall der Weglänge liegt ein ungerichtetes Linienintegral vor, im Fall der Arbeit liegt ein gerichtetes Linienintegral vor.

Eine Linie ist eine Abbildung eines eindimensionalen Raums auf einen mehrdimensionalen Raum. Sie wird dargestellt durch eine Funktion  $\vec{r}(s)$ .

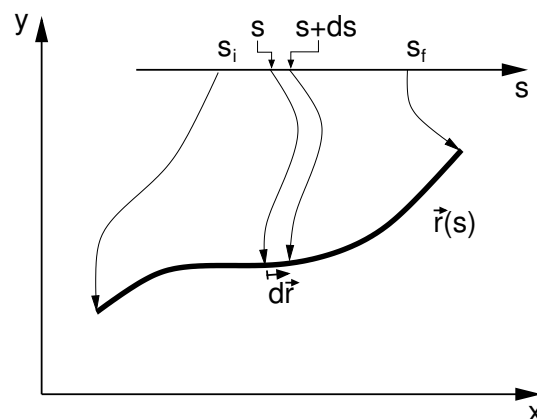


Abb. D.1: Bahnkurve. Die Bahnkurve  $\vec{r}(s)$  ist die Abbildung eines eindimensionalen Intervalls  $[s_i, s_f]$  auf den mehrdimensionalen Raum. Ein infinitesimales Bahnelement  $d\vec{r}$  ist der Vektor  $\vec{r}(s + ds) - \vec{r}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds$  für  $ds \rightarrow 0$ . Beachte, dass die  $s$ -Achse keine Position im  $x - y$  Diagramm hat sondern nur aus Platzgründen in das Achsensystem eingezeichnet wurde.

Um ein Bahnintegral zu beschreiben, zerlegen wir die Linie in lineare Liniensegmente und lassen anschließend die Länge der Liniensegmente gegen Null gehen.

### D.1.1 Weglänge

Wir beginnen mit der Bestimmung der Weglänge, indem wir das eindimensionale Intervall  $[s_i, s_f]$  in kleine Intervalle  $\Delta s = \frac{s_f - s_i}{N}$  zerlegen, wobei  $N$  eine ganze Zahl ist die wir anschließend nach unendlich gehen lassen. Wir ersetzen nun die Linie in Segmente. Die Länge der Segmente ist  $|\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)|$ . Indem wir die Segmente aufsummieren erhalten wir eine Näherung für die Länge der Linie.

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} |\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)|$$

wobei

$$s_k = s_i + \frac{s_f - s_i}{N}(k - 1)$$

Den Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} |\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)| \stackrel{Taylor}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \Delta s + O(\Delta s)^2 \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \Delta s}_{\rightarrow \int ds} \sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2} + \underbrace{\sum_k O(\Delta s)^2}_{\rightarrow 0} \right] \\ &= \int_{s_i}^{s_f} ds \underbrace{\sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2}}_{dr} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Weglänge auf ein reguläres eindimensionales Integral über das Intervall  $[s_i, s_f]$  abgebildet.

Wichtig ist, dass das Integral unabhängig von der Wahl des eindimensionalen Parameters  $s$  ist. Betrachten wir zum Beispiel eine andere Parameterisierung indem wir  $s$  auf  $t(s)$  umtransformieren:

$$\begin{aligned} \int_{s_i}^{s_f} ds \sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2} &= \int_{t_i}^{t_f} \underbrace{dt \frac{ds(t)}{dt}}_{ds} \sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{\left( \left. \frac{d\vec{r}}{ds} \right|_{s(t)} \frac{ds(t)}{dt} \right)^2} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2} \end{aligned}$$

Im Vorletzten Schritt haben wir die Kettenregel  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$  angewandt. Wir erhalten also denselben Ausdruck unabhängig davon, wie wir die Linie parameterisieren. Deshalb wählt man eine Schreibweise, die unabhängig von der Parameterisierung ist.

#### Weglänge

$$L = \int_{\vec{r}} dr \stackrel{\text{def}}{=} \int_{s_i}^{s_f} ds \sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2}$$

Dabei steht der Index  $\vec{r}$  für die Menge aller Punkte  $\{\vec{r}(s)\}$ , die durch Abbildung des eindimensionalen Intervalls  $[s_i, s_f]$  auf den mehrdimensionalen Raum hervorgehen.

### D.1.2 Ungerichtete Linienintegrale

Analog können wir das Linienintegral einer Funktion  $f(\vec{r})$  bestimmen, indem wir jedes Liniensegment mit dem Wert der Funktion  $f$  gewichten.

#### UNGERICHTETES LINIENINTEGRAL

$$\int_{\vec{r}} dr f(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{s_i}^{s_f} ds \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2} f(\vec{r}(s))$$

Dabei steht der index  $\vec{r}$  für die Menge aller Punkte  $\{\vec{r}(s)\}$ , die durch Abbildung des eindimensionalen Intervalls  $[s_i, s_f]$  auf den mehrdimensionalen Raum hervorgehen.

### D.1.3 Gerichtete Linienintegrale

Betrachten wir nun ein gerichtetes Linienintegral. Ein Beispiel für ein Linienintegral ist die Arbeit  $\Delta W$ , die als Kraft mal Weg definiert werden kann. Wir haben also eine Vektorfunktion  $\vec{F}(\vec{r})$  und eine Linie, welche den Weg eines Teilchens beschreibt. Im Gegensatz zum ungerichteten Linienintegral hängt die Arbeit davon ab, ob die Bahn vorwärts oder rückwärts durchlaufen wird. Darüber hinaus geht hier das Liniensegment mit seiner Richtung ein.

Wir stellen das Linienintegral wieder durch seine segmentierte Form dar.<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \Delta W &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)) \vec{F}(\vec{r}(s_k)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \Delta s + O(\Delta s)^2 \right) \vec{F}(\vec{r}(s_k)) \\ &= \int_{s_i}^{s_f} ds \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{dr} \vec{F}(\vec{r}(s)) \end{aligned}$$

Betrachten wir  $s$  als Zeitvariable, dann kann man die Arbeit als das Integral über die Zeit von "Kraft mal Geschwindigkeit" auffassen.

Wie beim ungerichteten Linienintegral ist auch das gerichtete Linienintegral unabhängig von der Parameterisierung des Wegs. Das bedeutet, dass das Linienintegral unabhängig von der Geschwindigkeit ist, mit der die Bahn durchlaufen wird. Man testet das indem man die Zeit umtransformiert  $t' = t'(t)$ , sodass

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{dt'(t)}{dt} dt \Rightarrow dt = dt' \frac{1}{\frac{dt'(t)}{dt}} \\ \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt'} \frac{dt'(t)}{dt} = \vec{v}'(t'(t)) \frac{dt'(t)}{dt} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{t_1}^{t_2} dt' \frac{1}{\frac{dt'(t)}{dt}} \vec{F}(\vec{r}(t')) \vec{v}'(t') \frac{dt'(t)}{dt} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt' \vec{F}(\vec{r}(t')) \vec{v}'(t') \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Beachte, dass der folgende Ausdruck kein wirklicher Beweis ist, da ich nicht zeige, dass wir das Linienintegral über das Liniensegment durch den Wert der Kraft am einen Ende und dem Wegelement ausdrücken kann.

Wenn das Integral unabhängig von einer Transformation der Zeitskala ist, dann können wir von der Zeitinformation abstrahieren indem wir das Zeitintegral durch ein Linienintegral ersetzen. Eine Kurzschreibweise für das Linienintegral ist durch die folgende Definition gegeben.

**Definition D.1** GERICHTETES LINIENINTEGRAL

$$\int_{\vec{r}} d\vec{r} \vec{F}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt}$$

## D.2 Flächenintegrale

Analog zu den Linien lassen sich Flächen darstellen. In diesem Fall wählen wir eine Abbildung  $\vec{r}(u, v)$ , welche einen Bereich des zweidimensionalen Raums auf die Oberfläche abbildet.

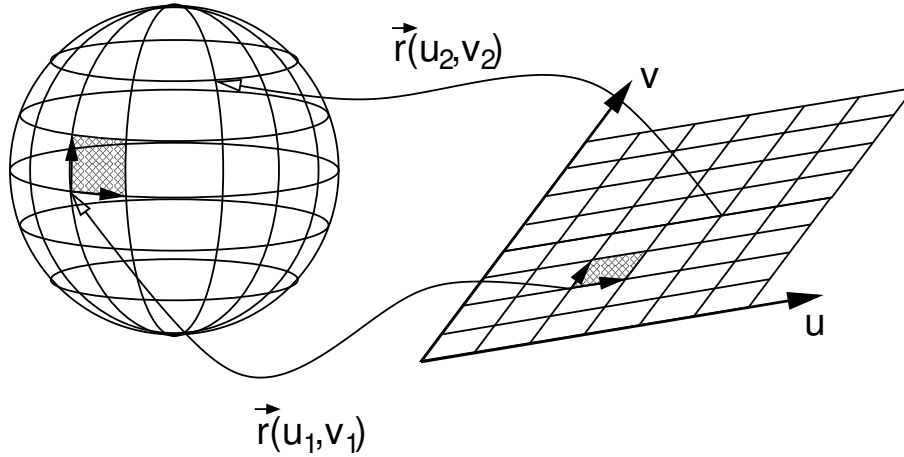


Abb. D.2: Fläche. Eine Fläche wird als Abbildung  $\vec{r}(u, v)$  aus einem zweidimensionalen Bereich in den dreidimensionalen Raum dargestellt. Die Vektoren, welche ein Flächenelement aufspannen sind  $d\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$  und  $d\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$ . Das Flächensegment hat die Fläche  $dA = |d\vec{A}|$  mit  $d\vec{A} = d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v$ . Der Vektor  $d\vec{A}$  steht senkrecht auf der Oberfläche und kann daher durch den normierten Normalenvektor  $\vec{n}$  als  $d\vec{A} = \vec{n} dA$  ausgedrückt werden.

### D.2.1 Fläche

Um die Fläche zu bestimmen, zerlegen wir die Oberfläche in ebene Flächensegmente. Dazu diskretisieren wir den zweidimensionalen  $(u, v)$ -Raum in diskrete Bereiche. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der  $(u, v)$ -Bereich ein Rechteck  $[u_i, u_f] \times [v_i, v_f]$  aufspannt<sup>2</sup>. Die diskreten Gitterpunkte sind

$$\begin{aligned} u_j &= u_0 + j\Delta u \\ v_k &= v_0 + k\Delta v \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir die Punkte auf der Oberfläche als

$$\vec{r}_{i,j} = \vec{r}(u_0 + i\Delta u, v_0 + j\Delta v)$$

<sup>2</sup>Das Symbol  $\times$  bezeichnet hier nicht das Kreuzprodukt, sondern beschreibt, dass das Rechteck aus zwei eindimensionalen Intervallen aufgespannt wird.

Nun betrachten wir ein Flächensegment, das von vier benachbarten Punkten auf der Oberfläche aufgespannt wird. Wir vernachlässigen hierbei, dass die Seiten des entsprechenden Vierecks nicht parallel ist, da dies im Limes insignifikant wird. Dann können wir die Fläche  $\Delta A$  des Segments durch das Kreuzprodukt der beiden Vektoren  $\Delta \vec{r}_u$  und  $\Delta \vec{r}_v$ , die das Flächensegment aufspannen, ausdrücken. Die beiden Vektoren sind

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r}_u(i, j) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}(u_i + \Delta u, v_j) - \vec{r}(u_i, v_j) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u + O(\Delta u^2) \\ \Delta \vec{r}_v(i, j) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}(u_i, v_j + \Delta v) - \vec{r}(u_i, v_j) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v + O(\Delta v^2)\end{aligned}$$

Sodass das Flächensegment die Form

$$\begin{aligned}\Delta A_{i,j} &= |\Delta \vec{r}_u \times \Delta \vec{r}_v| + O(\Delta u^2, \Delta v^2) \\ &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big|_{\vec{r}_{i,j}} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big|_{\vec{r}_{i,j}} \right| \Delta u \Delta v + O(\Delta u^2, \Delta v^2)\end{aligned}$$

Die Fläche erhält man Aufsummieren und anschließendem Grenzübergang  $\Delta u \rightarrow 0$  und  $\Delta v \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}A &= \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{i,j} A_{i,j} \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \sum_i \Delta u \sum_j \Delta v \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big|_{\vec{r}_{i,j}} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big|_{\vec{r}_{i,j}} \right| \\ &= \int du \int dv \left| \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \right|\end{aligned}$$

## D.2.2 Ungerichtetes Flächeintegral

Ein ungerichtetes Flächenintegral erhält man, indem man jedes Flächensegment mit einer Funktion  $F(\vec{r})$  wichtet.

### UNGERICHTETES FLÄCHENINTEGRAL

$$\int dA F(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \int dv \left| \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \right| F(\vec{r}(u, v))$$

## D.2.3 Gerichtetes Flächeintegral

### GERICHTETES FLÄCHENINTEGRAL

$$\int d\vec{A} \vec{F}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \int dv \left( \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \right) \vec{F}(\vec{r}(u, v))$$

## D.2.4 Gauß Theorem

Das Gauß theorem sagt, dass das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein Volumen gleich dem Oberflächenintegral des Vektorfeldes ist. Damit wird der die Divergenz als Quelldichte des

Vektorfeldes identifiziert.

$$\int d^3r \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) = \oint d\vec{A} \vec{f}(\vec{r}) \quad (\text{D.1})$$

Betrachtet man das Vektorfeld als Fluss einer Flüssigkeit, dann beschreibt die Divergenz zum Beispiel wie stark sich das Volumen eines Farbkleckes in der Flüssigkeit (ohne Diffusion) ausbreitet. Beachte, dass die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes in Wasser näherungsweise verschwindet. Ein idealer Farbkleck kann sich daher nur in seiner Form verändern aber sein Gesamtvolumen nicht verändern. Es muss also an den Punkten, bei der die Divergenz ungleich null ist, Wasser hinzugefügt oder abgeleitet werden.

### Eindimensionaler Spezialfall

Betrachte

$$\int_a^b dx \frac{df(x)}{dx} = f(b) - f(a)$$

Schreibe mit Hilfe der Heavisidefunktion  $\theta_{[a,b]}(x) = \theta(x-a)\theta(b-x)$

Übung: Beschränktes Integral

$$\begin{aligned} \int dx \theta_{[a,b]}(x) \frac{df}{dx} &= \int dx \left[ \frac{d}{dx} \left( \theta_{[a,b]}(x) f(x) \right) - f(x) \frac{d}{dx} \theta_{[a,b]}(x) \right] \\ &= - \int dx f(x) \left( \delta(x-a)\theta(b-x) + \theta(x-a)\delta(x-b) \right) \\ &= - \int dx \left( f(x)\delta(x-a) - f(x)\delta(x-b) \right) \\ &= -f(a) + f(b) \end{aligned}$$

### Gauß'scher Satz

Betrachte: Volumenintegral der Divergenz  $\vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) = \sum_i \frac{df_i}{dx_i}$  eines Gradienten

$$\int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r})$$

Eine Komponente  $g(r) \stackrel{\text{def}}{=} f_z(x)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d^3r \frac{dg(\vec{r})}{dz} &= \int dx \int dy \int dz \frac{dg(\vec{r})}{dz} \\ &= \int_{x_-}^{x_+} dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy \left( g(z_+(x, y)) - g(z_-(x, y)) \right) \end{aligned}$$

Flächenelement:  $d\vec{u}$  ist ein Vektor der in der Oberfläche liegt und als Projektion auf die xy-Ebene  $dx$  (eigentlich  $d\vec{x}$ ) ergibt.  $d\vec{v}$  ist genauso durch die Projektion und  $dy$  definiert.

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= (dx, 0, \frac{dz_+}{dx}) \\ d\vec{v} &= (0, dy, \frac{dz_+}{dy}) \\ d\vec{A} &= d\vec{u} \times d\vec{v} = (-dy \frac{dz_+}{dx}, -dx \frac{dz_+}{dy}, dx dy) \\ \Rightarrow dA_z &= dx dy \end{aligned}$$

$d\vec{A}$  hat die Richtung der Oberflächennormalen und die Größe eines Flächenelementes.  $d\vec{A}$  zeigt immer aus dem Volumen heraus.

Vervollständigen:

Die Oberfläche von  $\Omega$  werde  $\partial\Omega$  genannt

$$\int_{\Omega} d^3r \frac{dg(\vec{r})}{dz} = \oint_{\partial\Omega} dA_z g(x, y, z) = \oint_{\partial\Omega} dA_z f_z(x, y, z)$$

Verallgemeinern und Zusammenfassen auf drei Komponenten: **Gauß'scher Integralsatz**

$$\int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) = \int_{\partial\Omega} d\vec{A} \vec{f}(x, y, z)$$

### Andere Herleitung des Gauß'schen Integralsatzes (Eselsbrücke)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) &= \int d^3r \theta_{\Omega}(\vec{r}) \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) = - \int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \vec{\nabla} \theta_{\Omega}(\vec{r}) = \int d^3r f(\vec{r}) \vec{n} \delta_{\partial\Omega}(\vec{r}) \\ &= \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \vec{f}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Wir haben verwendet

- $\partial\Omega$  die Oberfläche des Volumens  $\Omega$
- die Flächennormale  $\vec{n}(r) = \frac{\vec{\nabla}\theta}{|\vec{\nabla}\theta(r)|}$ . Definiert durch den Limes der Stufenfunktionfunktion.
- Die  $\delta$ -Funktion der Oberfläche.  $\delta_{\partial\Omega}(x) = |\nabla\theta(r)|$ . Definiert durch

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\theta_{\Omega}(\vec{r}) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{n}(r) \delta_{\partial\Omega} \\ \int d^3r f(r) \delta_{\partial\Omega} &\stackrel{\text{def}}{=} \int dA f(r) \end{aligned}$$

### Varianten des Gauß'schen Integralsatzes

- Eindimensional

$$\int_a^b dx \frac{df(x)}{dx} = f(b) - f(a)$$

- Integral eines Gradienten

$$\int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} f(\vec{r}) = - \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} f(\vec{r})$$

## D.3 Stokesscher Satz

### SATZ VON STOKES

Das Flächenintegral der Rotation  $\vec{\nabla} \times \vec{f}$  eines Vektorfeldes ist gleich dem geschlossenen Integral des Vektorfeldes über den Rand  $\partial A$  der Fläche  $A$ .

$$\int_A d\vec{A} (\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r})) = \oint_{\partial A} d\vec{r} \vec{f}(\vec{r}) \quad (\text{D.2})$$

Betrachten wir das Vektorfeld wieder als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit, dann ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich ein Ball der mit der Flüssigkeit mitschwimmt, gerade die Hälfte der Rotation des geschwindigkeits Feldes. Die Richtung der Rotation ist die Drehachse.

Eine wichtige Aussage ist, dass ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, als Gradientenfeld einer skalaren Funktion dargestellt werden kann. Diese skalare Funktion ist gerade das Linienintegrals des Vektorfeldes von einem Referenzpunkt zu dem Ort an dem der Wert der skalaren Funktion bestimmt werden soll. Der Wert dieses Linienintegrals ist eindeutig und Bahnunabhängig, da in einem Rotationsfreien Vektorfeld das Linienintegral einer geschlossenen Bahn verschwindet.

Beweis:

Betrachte ein kleines Rechteck in der x-y Ebene. Der Ursprung liege im Zentrum des Rechtecks, das die Seitenlängen  $l_x$  und  $l_y$  habe.

Wir bestimmen nun das Linienintegral des Vektorfeldes  $\vec{f}(\vec{r})$  auf dem Rand des Rechtecks.

$$\oint d\vec{r}\vec{f}(\vec{r}) = \int_{-l_y/2}^{+l_y/2} dy \left[ \underbrace{f_y\left(\frac{l_x}{2}, y, 0\right)}_{(1)} - \underbrace{f_y\left(-\frac{l_x}{2}, y, 0\right)}_{(3)} \right] \\ + \int_{-l_x/2}^{+l_x/2} dx \left[ \underbrace{-f_x\left(x, \frac{l_y}{2}, 0\right)}_{(2)} + \underbrace{f_x\left(x, -\frac{l_y}{2}, 0\right)}_{(4)} \right]$$

Nun entwickeln wir die Funktion um den Ursprung

$$f_y\left(\pm\frac{l_x}{2}, y, 0\right) = f_y \pm \frac{l_x}{2} \frac{\partial f_y}{\partial x} + y \frac{\partial f_y}{\partial y} + O(l_x, l_y)^2$$

Dabei werden alle Werte und Ableitungen von  $f_y$  auf der rechten Seite am Ursprung genommen. Für das Integral sind dies also Konstanten, die ausgeklammert werden können.

$$\stackrel{Taylor}{=} \int_{-l_y/2}^{+l_y/2} dy \left[ f_y(0, 0, 0) + \frac{l_x}{2} \partial_x f_y + y \partial_y f_y + O(l_x^2, l_y^2) \right] \\ - \int_{-l_y/2}^{+l_y/2} dy \left[ f_y(0, 0, 0) - \frac{l_x}{2} \partial_x f_y + y \partial_y f_y + O(l_x, l_y)^2 \right] \\ - \int_{-l_x/2}^{+l_x/2} dx \left[ f_x(0, 0, 0) + x \partial_x f_x + \frac{l_y}{2} \partial_y f_x + O(l_x, l_y)^2 \right] \\ + \int_{-l_x/2}^{+l_x/2} dx \left[ f_x(0, 0, 0) + x \partial_x f_x - \frac{l_y}{2} \partial_y f_x + O(l_x, l_y)^2 \right] \\ = 2 \int_{-l_y/2}^{+l_y/2} dy \left[ \frac{l_x}{2} \partial_x f_y \right] + l_y O(l_x, l_y)^2 - 2 \int_{-l_x/2}^{+l_x/2} dx \left[ \frac{l_y}{2} \partial_y f_x \right] + l_x O(l_x, l_y)^2 \\ = l_x l_y \underbrace{[\partial_x f_y - \partial_y f_x]}_{(\vec{\nabla} \times \vec{f})_z} + l_x O(l_x, l_y)^2 + l_y O(l_x, l_y)^2 \\ = \int_{-l_x/2}^{l_x/2} dx \int_{-l_y/2}^{l_y/2} dy (\vec{\nabla} \times \vec{f})_z + l_x O(l_x, l_y)^2 + l_y O(l_x, l_y)^2$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Stokessche Satz für ein infinitesimal kleines Rechteck erfüllt ist. Das Resultat kann durch Koordinatendrehung auf beliebig orientierte Rechtecke verallgemeinert werden.

Nun müssen wir zeigen, dass dieser Satz auch für beliebige Flächen gilt. Dazu zerlegen wir diese Fläche in viele kleine Flächenelemente. Man überzeugt sich leicht, dass sich die Linienintegrale an



den Kanten, auf denen zwei Flächenelemente zusammenstoßen, wegheben. Die Linienintegrale auf der Außenseite der Fläche lassen sich zu einem einzelnen Linienintegral zusammenfügen.

Zu beachten ist noch ob der Term  $I_x O(I_x, I_y)^2 + I_y O(I_x, I_y)^2$  verschwindet, wenn wir die Flächenintegrale verschwindend klein machen. Davon kann man sich anhand eines Dimensionsarguments überzeugen. Betrachte eine Fläche mit den Seitenlängen  $L$ . Jede Seite der Fläche werde in  $N$  Teile zerlegt, sodass  $N^2$  Flächenelemente mit der Seitenlänge  $L/N$  entstehen. Wir erhalten also  $N^2$  mal einen Fehler der Ordnung  $(\frac{1}{N})^3$ . Der Gesamtfehler verschwindet also für  $N \rightarrow \infty$ .

## D.4 Zerlegung eines Vektorfeldes in ein Divergenzfreies Feld und ein Rotationsfreies Feld

Jedes beliebige Vektorfeld kann in ein Gradientenfeld, das keine Rotation besitzt, und ein divergenzfreies Feld zerlegt werden.

**Editor: Mehr hier!**

## D.5 Helmholtz Theorem

**Editor: In bearbeitung: Das ist noch nicht wasserdicht!**

### HELMHOLTZ THEOREM

Das **Helmholtz Theorem** (Hauptsatz der Vektoranalysis) sagt, dass man jedes Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  in eine wirbelfreies Feld  $\vec{G}(\vec{r})$ , d.h.  $\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ , und ein quellenfreies Feld  $\vec{H}(\vec{r})$ , d.h.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ , zerlegen kann, wenn sein Betrag  $|\vec{F}(\vec{r})|$  im Unendlichen wie  $\frac{1}{r^2}$  oder schneller verschwindet

$$\begin{aligned} |\vec{F}(\vec{r})| \stackrel{|\vec{r}| \rightarrow \infty}{\sim} O\left(\frac{1}{|\vec{r}|^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = \vec{G} + \vec{H} \\ \text{mit} \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Dabei kann das rotationsfreie Feld  $\vec{G}$  als Gradient  $\vec{G} = \vec{\nabla} U$  eines skalaren Potentials  $U(\vec{r})$  und  $\vec{H}$  als Rotation  $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  dargestellt werden

Die Funktionen  $U(\vec{r})$  und  $\vec{A}(\vec{r})$  erfüllen die Poissongleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 U &= \nabla \cdot \vec{F} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{A} &= -\nabla \times \vec{F} \end{aligned}$$

[Siehe: <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/erlaeuterung/erlaeuterung441/>]

**Beweis:**

- Wir beginnen damit, das wirbelfreie Vektorfeld  $\vec{G}$  zu konstruieren. Bestimme zunächst  $U(\vec{r})$  aus

$$\nabla^2 U = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

Das Potential  $U(\vec{r})$  ist bis auf eine Lösung  $U_{hom}(\vec{r})$  der homogenen Gleichung, der Laplacegleichung  $\vec{\nabla}^2 U_{hom} = 0$ , festgelegt.

- Nun bestimme

$$\vec{G}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} U$$

$\vec{G}(\vec{r})$  ist wegen  $\nabla \times \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$  wirbelfrei.<sup>3</sup> Das Vektorfeld  $\vec{G}(\vec{r})$  ist bis auf ein divergenz- und rotationsfreies Feld  $\vec{G}_{hom} = \vec{\nabla} U_{hom}$  eindeutig, weil  $\vec{\nabla} \vec{G}_{hom} = \vec{\nabla}^2 U_{hom} = 0$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$ .

3. Wir ziehen das Feld  $\vec{G}$  vom Vektorfeld  $\vec{F}$  ab und zeigen, dass die Divergenz des restlichen Feldes verschwindet.

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} - \vec{G}$$

$$\vec{\nabla} \vec{H} = \vec{\nabla} \vec{F} - \underbrace{\vec{\nabla} \vec{G}}_{\vec{\nabla} U} = \vec{\nabla} \vec{F} - \underbrace{\vec{\nabla}^2 U}_{\vec{\nabla} \vec{F}} = 0$$

4. Die Lösungen für  $\vec{G}(\vec{r})$  und  $\vec{H}(\vec{r})$  besitzen immer noch die Freiheit ein wirbel- und quellenfreies Feld  $\vec{G}_{hom}$  zu addieren.

$$\vec{G}' = \vec{G} + \vec{\nabla} U_{hom} \quad \vec{H}' = \vec{H} - \vec{\nabla} U_{hom}$$

Wählen wir  $U_{hom}$  derart, dass  $U$  im Unendlichen verschwindet, dann ist  $U_{hom}$  eindeutig bestimmt. Daraus folgt, dass auch die Vektorfelder  $\vec{G}$  und  $\vec{H}$  eindeutig sind.

<sup>3</sup>Dies folgt direkt aus der Eigenschaft des Levi-Civita Symbols

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})_i = \sum_{j,k} \underbrace{\epsilon_{i,j,k}}_{=-\epsilon_{i,k,j}} \underbrace{\partial_j \partial_k}_{\partial_k \partial_j} = - \sum_{k,j} \epsilon_{i,k,j} \partial_k \partial_j$$

. Da der Operator mit seinem Negativen identisch ist, verschwindet sie.

## Appendix E

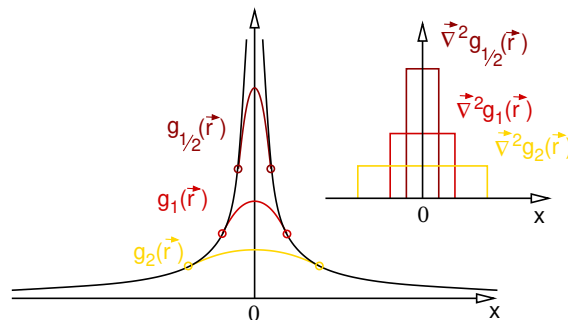
# Diracsche Deltafunktion

### E.0.1 Nützlicher Satz für $\delta$ -Funktionen

$$\nabla^2 \frac{1}{|r|} = -4\pi\delta(r) \quad (\text{E.1})$$

Beweis:

Wir wählen eine Funktionenfolge  $g_\lambda(|\vec{r}|)$  so, dass jedes Mitglied  $g_\lambda$  differenzierbar ist und die Folge im Grenzfall in  $\frac{1}{|\vec{r}|}$  übergeht.  $\nabla^2 g_\lambda$  muss dann in die Deltafunktion mit dem richtigen Vorfaktor übergehen. Wir erkennen anschließend, dass aus dem "Umknicken" der Funktion am Ursprung gerade die  $\delta$ -Funktion entsteht.



Wir definieren die Folge von Funktionen

$$g_\lambda(r) = \theta(r - \lambda) \frac{1}{r} + \theta(\lambda - r) \frac{1}{\lambda} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 \right) \quad (\text{E.2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}|} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} g_\lambda(|\vec{r}|)$$

$\theta(x)$  ist die Heaviside Funktion, die für negative Werte verschwindet und für positive Werte den Wert eins annimmt. Die Funktion ist außerhalb einer Kugel mit Radius  $\lambda$  gerade gleich  $1/r$ . Innerhalb der Kugel ist sie eine Parabel, die am Kugelrand differenzierbar in die Funktion des Außenbereichs übergeht.

Nun wenden wir den Laplaceoperator auf diese Funktionen an

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}^2 g_\lambda(|\vec{r}|) &= \vec{\nabla} \left( \frac{dg_\lambda}{dr} \underbrace{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{\vec{\nabla}|\vec{r}|} \right) = \left( \vec{\nabla} \frac{dg_\lambda}{dr} \right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} + \frac{dg_\lambda}{dr} \left( \vec{\nabla} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) \\
 &= \frac{d^2 g_\lambda}{dr^2} \underbrace{\left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)^2}_{=1} + \frac{dg_\lambda}{dr} \left( \underbrace{\frac{\vec{\nabla} \vec{r}}{|\vec{r}|}}_{=\frac{3}{|\vec{r}|}} - \underbrace{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{\frac{1}{|\vec{r}|}} \right) \\
 &= \frac{d^2 g_\lambda}{dr^2} + \frac{dg_\lambda}{dr} \frac{2}{|\vec{r}|}
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Nun bestimmen wir die Ableitungen von  $g_\lambda$ . Dabei nutzen wir aus, dass die Ableitung der Heaviside-Funktion gerade die  $\delta$ -Funktion ist.

$$\begin{aligned}
 \frac{dg_\lambda}{dr} &\stackrel{\text{Gl. E.2}}{=} \underbrace{\delta(r-\lambda) \frac{1}{r}}_{\delta(r-\lambda) \frac{1}{\lambda}} - \theta(r-\lambda) \frac{1}{r^2} - \underbrace{\delta(\lambda-r) \frac{1}{\lambda} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 \right)}_{\delta(r-\lambda) \frac{1}{\lambda}} + \theta(\lambda-r) \frac{1}{\lambda} \left( -\frac{r}{\lambda^2} \right) \\
 &= -\theta(r-\lambda) \frac{1}{r^2} - \theta(\lambda-r) \frac{r}{\lambda^3}
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

Die beiden  $\delta$ -Funktionen löschen sich gegenseitig aus, was man erwartet, da  $g_\lambda$  ja keine Stufen enthält, sondern differenzierbar ist.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 g_\lambda}{dr^2} &\stackrel{\text{Gl. E.4}}{=} \underbrace{-\delta(r-\lambda) \frac{1}{r^2}}_{\delta(r-\lambda) \frac{1}{\lambda^2}} + \theta(r-\lambda) \frac{2}{r^3} + \underbrace{\delta(\lambda-r) \frac{r}{\lambda^3}}_{\delta(r-\lambda) \frac{1}{\lambda^2}} - \theta(\lambda-r) \frac{1}{\lambda^3} \\
 &= \theta(r-\lambda) \frac{2}{r^3} - \theta(\lambda-r) \frac{1}{\lambda^3}
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

Damit erhalten wir  $\vec{\nabla}^2 g_\lambda(|\vec{r}|)$  als

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}^2 g_\lambda(|\vec{r}|) &\stackrel{\text{Gl. E.3}}{=} \frac{d^2 g_\lambda}{dr^2} + \frac{dg_\lambda}{dr} \frac{2}{|\vec{r}|} \\
 &= \theta(|\vec{r}|-\lambda) \frac{2}{|\vec{r}|^3} - \theta(\lambda-|\vec{r}|) \frac{1}{\lambda^3} + \left( -\theta(|\vec{r}|-\lambda) \frac{1}{|\vec{r}|^2} - \theta(\lambda-|\vec{r}|) \frac{|\vec{r}|}{\lambda^3} \right) \frac{2}{|\vec{r}|} \\
 &= -\theta(\lambda-|\vec{r}|) \frac{3}{\lambda^3} \\
 &= -4\pi \left( \frac{4\pi\lambda^3}{3} \right)^{-1} \theta(\lambda-|\vec{r}|)
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

Bis auf den Faktor  $-4\pi$  erhalten wir eine Stufenfunktion, die innerhalb einer Kugel mit Radius  $\lambda$  einen konstanten Wert hat, der gerade so gewählt ist, dass das Integral gleich eins ist. Die Funktionenfolge konvergiert also für  $\lambda \rightarrow 0$  gegen die  $\delta$ -Funktion.

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{\nabla}^2 g_\lambda(|\vec{r}|) \stackrel{\text{Gl. E.6}}{=} -4\pi \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{4\pi\lambda^3}{3} \right)^{-1} \theta(\lambda-|\vec{r}|) = -4\pi\delta(\vec{r})$$

q.e.d

### Einfache Überlegungen

Falls der Beweis zu unanschaulich ist helfen folgende Überlegungen:

- Das Integral von  $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{r}|}$  über eine Kugel, die am Ursprung zentriert ist, deren Radius  $R$  aber beliebig ist, ist gerade  $-4\pi$ .

Betrachte das Integral von  $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|}$  über eine Kugel  $\Omega$  mit Oberfläche  $\partial\Omega$  und Radius  $R$

$$\int_{\Omega} d^3r \nabla^2 \frac{1}{r} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \oint_{\partial\Omega} d|\vec{A}| \partial_r \frac{1}{r} = (4\pi R^2) \left( \frac{-1}{R^2} \right) = -4\pi$$

Das Resultat ist unabhängig von  $R$ . Es liegt also eine Funktion vor, die in eine infinitesimalen Umgebung vom Ursprung lokalisiert ist.

- Bis auf den Ursprung verschwindet  $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|}$ .

Für  $r \neq 0$  gilt  $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|} &= \sum_i \partial_i^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_i \partial_i \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x \\ &= \sum_i \partial_i (-x) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \sum_i (-1) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + (-x) \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2x) \\ &= \sum_i (-1) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + (3x^2) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \sum_i \left( -\frac{1}{|\vec{r}|^3} + 3r_i^2 \frac{1}{|\vec{r}|^5} \right) = 0 \end{aligned}$$

- Die Deltafunktion besitzt gerade die Eigenschaften, dass sie in einem beliebig kleinen Bereich um den Ursprung lokalisiert ist und ihr Integral gleich eins ist. Dies legt nahe, dass Gl. E.1 erfüllt ist. (Im Gegensatz zu dem obigen Beweis, ist dies hier kein strikter Beweis, sondern nur eine Art Eselsbrücke.)

### E.0.2 Gradient der Stufenfunktion

In vielen Fällen ist es sehr hilfreich ein Integral über einen endlichen Bereich durch ein Integral über den unendlichen Raum zu betrachten, bei dem der Integrand in einem endlichen Bereich durch eine Stufenfunktion herausgeschnitten wird. Dies macht die Anwendung der Integralsätze einfacher. Allerdings benötigen wir dann die Gradienten der Stufenfunktion. Dieser soll hier abgeleitet werden.

Zunächst definieren wir die Stufenfunktion  $\theta_{\Omega}(\vec{r})$  so, dass sie im Bereich  $\Omega$  den Wert 1 hat und außerhalb des Bereichs verschwindet. Also

$$\theta_{\Omega}(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{r} \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir bestimmen nun den Gradienten von  $\theta_{\Omega}(\vec{r})$ . Da die Stufenfunktion nicht differenzierbar ist, erwarten wir bereits als Gradienten einer Stufenfunktion eine Distribution. Deshalb wenden wir die für Distributionen übliche Technik an und untersuchen das Integral der Funktion mit einer beliebigen,

hinreichend oft differenzierbaren, Testfunktion  $f(\vec{r})$ . Es sei  $\Omega$  ein beliebiges Volumen und  $\partial\Omega$  sein Rand.

$$\begin{aligned}\int d^3r f(\vec{r}) \vec{\nabla} \theta(\vec{r}) &= - \int d^3r \theta(\vec{r}) \vec{\nabla} f(\vec{r}) \stackrel{\text{Gau}}{=} - \int_{\partial\Omega} d\vec{A} f(\vec{r}) \\ &= - \int_{\partial\Omega} d\vec{A} \int d^3r' \delta(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}') \\ &= \int d^3r' f(\vec{r}') \left[ - \int_{\partial\Omega} d\vec{A} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right]\end{aligned}$$

#### GRADIENT EINER STUFENFUNKTION

$$\vec{\nabla} \theta_{\Omega}(\vec{r}) = - \int_{\partial\Omega} d\vec{A}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{E.7})$$

Der Gradient der Stufenfunktion ist also am Rand des Bereichs  $\Omega$  lokalisiert. Dort trägt es mit einer  $\delta$ -Funktion bei, und der Vektor ist in den Bereich hinein gerichtet, da die Funktion ja in diese Richtung ansteigt.

Der Ausdruck Gl. E.7 verkapselt gerade das Gauß-Theorem, was wie folgt gezeigt wird:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} d^3r \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) &= \int d^3r \theta_{\Omega}(\vec{r}) \vec{\nabla} \vec{f}(\vec{r}) = - \int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \vec{\nabla} \theta_{\Omega}(\vec{r}) \\ &= - \int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \left( - \oint_{\partial\Omega} d\vec{A}' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right) \\ &= \oint_{\partial\Omega} d\vec{A}' \underbrace{\left( \int d^3r \vec{f}(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right)}_{\vec{f}(\vec{r}')} \\ &= \oint_{\partial\Omega} d\vec{A}' \vec{f}(\vec{r}')\end{aligned}$$

## Appendix F

# Laplace operator in polar coordinates

On p. 68, the identity Gl. 5.29

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{|\vec{r}|} \partial_r^2 |\vec{r}| + \frac{1}{|\vec{r}|^2} (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 \quad (\text{F.1})$$

has been used.

We begin with the vector identity  $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$  to work out  $(\vec{r} \times \vec{\nabla})^2$ , because the differential operator cannot be interchanged with the position operator.

$$\vec{\nabla} \vec{r} f(\vec{r}) = (\vec{\nabla} \vec{r}) f(\vec{r}) + \vec{r} \vec{\nabla} f(\vec{r}) \neq \vec{r} \vec{\nabla} f(\vec{r}) \quad (\text{F.2})$$

Therefore, we use the form, which preserves the order of the vectors, namely

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = \sum_{i,j} (a_i b_j c_i d_j - a_i b_j c_j d_i) \quad (\text{F.3})$$

Now, we insert the positions and gradients

$$(\vec{r} \times \vec{\nabla})(\vec{r} \times \vec{\nabla}) f(\vec{r}) = \sum_{i,j} (r_i \partial_j r_i \partial_j - r_i \partial_j r_j \partial_i) f(\vec{r}) \quad (\text{F.4})$$

Before we continue, let me do some preparation: We start from the identity

$$\partial_i r_j f(\vec{r}) = \delta_{ij} f(\vec{r}) + r_j \partial_i f(\vec{r}) \quad (\text{F.5})$$

Because, this identity holds independent of the function  $f(\vec{r})$ , we can use it as generic rule to manipulate the symbols.

$$\partial_i r_j = \delta_{ij} + r_j \partial_i \quad (\text{F.6})$$

Now, we come back to Gl. F.4. The function  $f(\vec{r})$  is no more written out, but it is considered to be there all the time.

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{\nabla})(\vec{r} \times \vec{\nabla}) &\stackrel{\text{Gl. F.4}}{=} \sum_{i,j} (r_i \partial_j r_i \partial_j - r_i \partial_j r_j \partial_i) \\ &= \sum_{i,j} [r_i (\delta_{ij} + r_j \partial_j) \partial_j - r_i \partial_j (-\delta_{ij} + \partial_i r_j)] \\ &= \sum_{i,j} [\delta_{ij} r_i \partial_j + r_i r_j \partial_j \partial_j + \delta_{ij} r_i \partial_j - r_i \partial_i \partial_j r_j] \\ &= \sum_{i,j} [\delta_{ij} r_i \partial_j + r_i r_j \partial_j \partial_j + \delta_{ij} r_i \partial_j - r_i \partial_i (\delta_{jj} + r_j \partial_j)] \\ &= \vec{r}^2 \vec{\nabla}^2 - \vec{r} \vec{\nabla} - (\vec{r} \vec{\nabla})^2 \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Now we introduce the radial derivative Gl. 5.30

$$\partial_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \vec{\nabla} \quad (\text{F.8})$$

and the radius  $r = |\vec{r}|$ .

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 &= r^2 \vec{\nabla}^2 - r \partial_r - (r \partial_r)^2 \\ \Rightarrow \vec{\nabla}^2 &= \frac{1}{r^2} \left( (r \partial_r)^2 + (r \partial_r) + (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 \right) = \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2} (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

which is the desired relation Gl. F.1. qed.



## Appendix G

# Symbole

Dies ist nicht komplett!

|                |                                 |
|----------------|---------------------------------|
| $\vec{x}$      | vector "x"                      |
| $\mathbf{x}$   | matrix "x"                      |
| $\times$       | Kreuzprodukt                    |
| $\otimes$      | dyadisches oder äußeres Produkt |
| $\partial_t$   | Zeitableitung                   |
| $\dot{x}$      | Zeitableitung von $x(t)$        |
| $\vec{\nabla}$ | Gradient/Divergenz              |

|                       |                                       |
|-----------------------|---------------------------------------|
| $\vec{A}(\vec{r}, t)$ | Vektorpotential                       |
| $\int d\vec{A}$       | surface integral                      |
| $\Phi(\vec{r}, t)$    | elektrisches Potential                |
| $\vec{B}(\vec{r}, t)$ | Magnetfeld                            |
| $\vec{E}(\vec{r}, t)$ | elektrisches Feld                     |
| $\vec{D}(\vec{r}, t)$ | dielektrische Verschiebung            |
| $\vec{H}(\vec{r}, t)$ | magnetische Erregung                  |
| $\epsilon_0$          | Dielektrizitätskonstante des Vakuums  |
| $\epsilon_r$          | relative Dielektrizitätskonstante     |
| $\mu_0$               | Induktionskonstante des Vakuums       |
| $\mu_r$               | relative Induktionskonstante          |
| $\mu_B$               | Bohr Magneton                         |
| $\mu_e$               | magnetisches Moment des Elektrons     |
| $g_e$                 | gyromagnetischer Faktor des Elektrons |
| $c$                   | Lichtgeschwindigkeit                  |
| $q$                   | Ladung                                |
| $\vec{p}$             | Dipol                                 |
| $I$                   | Strom                                 |
| $\vec{P}(\vec{r}, t)$ | Polarisation                          |
| $\vec{M}(\vec{r}, t)$ | Magnetisierung                        |
| $\vec{m}$             | magnetisches Moment                   |
| $\rho(\vec{r}, t)$    | Ladungsdichte                         |
| $\vec{j}(\vec{r}, t)$ | Stromdichte                           |
| $Y_{\ell,m}(\vec{r})$ | Kugelflächenfunktion                  |
| $\chi_e$              | elektrische Suszeptibilität           |
| $\chi_m$              | magnetische Suszeptibilität           |
| $S$                   | Wirkung                               |
| $\mathcal{L}$         | Lagrange Funktion                     |
| $\ell$                | Lagrange Dichte                       |
| $\tau$                | Eigenzeit                             |
| $m_0$                 | Ruhemasse                             |
| $r_c$                 | Zyklotronradius                       |
| $\omega_c$            | Zyklotronfrequenz                     |

## Appendix H

# Griechisches Alphabet

|           |                         |         |            |                     |         |
|-----------|-------------------------|---------|------------|---------------------|---------|
| <i>A</i>  | $\alpha$                | alpha   | <i>N</i>   | $\nu$               | nu      |
| <i>B</i>  | $\beta$                 | beta    | $\Xi$      | $\xi$               | ksi     |
| $\Gamma$  | $\gamma$                | gamma   | <i>O</i>   | $o,$                | omicron |
| $\Delta$  | $\delta$                | delta   | $\Pi$      | $\pi, \varpi$       | pi      |
| <i>E</i>  | $\epsilon, \varepsilon$ | epsilon | <i>P</i>   | $\rho, \varrho$     | rho     |
| <i>Z</i>  | $\zeta$                 | zeta    | $\Sigma$   | $\sigma, \varsigma$ | sigma   |
| <i>H</i>  | $\eta$                  | eta     | <i>T</i>   | $\tau$              | tau     |
| $\Theta$  | $\theta, \vartheta$     | theta   | $\Upsilon$ | $\upsilon$          | upsilon |
| <i>I</i>  | $\iota$                 | iota    | $\Phi$     | $\phi, \varphi$     | phi     |
| <i>K</i>  | $\kappa$                | kappa   | <i>X</i>   | $\chi$              | chi     |
| $\Lambda$ | $\lambda$               | lambda  | $\Psi$     | $\psi$              | psi     |
| <i>M</i>  | $\mu$                   | mu      | $\Omega$   | $\omega$            | omega   |



# Appendix I

## Zum Author

Prof. Dr. rer.nat Peter E. Blöchl studierte Physik an der Technischen Universität Karlsruhe. Anschließend forschte er an den Max Planck Instituten für Metallforschung und Festkörperforschung in Stuttgart an Weiterentwicklungen von Elektronenstrukturmethoden in Verbindung mit der LMTO Methode sowie der theoretischen Untersuchung von Grenzflächen. Nach seiner Promotion im Jahr 1989 ging er mit einem World Trade Fellowship an das renommierte T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights in den USA. 1990 folgte er einem Angebot des IBM Forschungslaboratoriums in Rüschlikon, Schweiz, das gerade wegen zwei Nobelpreisen in Physik (Rastertunnelmikroskop 1986 und Hochtemperatursupraleitung 1987) im Rampenlicht stand. Neben seiner Tätigkeit am Forschungslabor nahm er im Sommersemester 1995 eine Gastprofessur an der TU Wien wahr, wo er sich 1997 habilitierte. Im Jahr 2000 verließ er das IBM Forschungslaboratorium nach 10-jähriger Tätigkeit und folgte einem Ruf auf eine Professur für Theoretische Physik an der Technischen Universität Clausthal. Prof. Blöchl ist seit 2003 Mitglied der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft.

Der Forschungsschwerpunkt von Prof. Blöchl liegt auf dem Gebiet der ab-initio Simulationen, also der parameterfreien Simulation von Prozessen in Materialien und Molekülen auf der Basis der Quantenmechanik. Er entwickelte die Methode der Projektor augmentierten Wellen, eine der verbreitetsten Simulationsmethoden für die Elektronenstruktur. Diese Arbeit wurde bisher über 88.000 mal zitiert.<sup>1</sup> Es ist unter den 100 wissenschaftlichen Publikationen mit den meisten Zitaten, unter Berücksichtigung aller Disziplinen und Zeiten. Es ist unter den zehn häufigst-zitierten Veröffentlichungen von Physical Review, die in seiner 120 Jahre alten Geschichte erschienen sind.<sup>2</sup> Neben seinen methodischen Arbeiten decken seine Forschungsthemen ein breites Feld der Simulationen von der Biochemie über die Chemie zu Festkörperphysik und den Materialwissenschaften ab. Prof Blöchl hat bei 8 Patenten mitgewirkt und etwa 100 wissenschaftliche Publikationen publiziert, unter anderem in so renommierten Zeitschriften wie "Nature". Seine Arbeiten wurden mehr als 110.000 mal zitiert und er hat einen H-index von 52.<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>[scholar.google.com](https://scholar.google.com), retrieved Apr.23, 2025

<sup>2</sup>Oct. 15, 2014, Suche im Physical Review Online Archive mit dem Suchkriterium "a-z".

<sup>3</sup>[scholar.google.com](https://scholar.google.com), retrieved Apr.23, 2025



## Appendix J

# Zur Philosophie der $\Phi$ SX Reihe

In the  $\Phi$ SX series, I tried to implement what I learned from the feedback given by the students which attended the courses and that relied on these books as background material.

The course should be **self-contained**. There should not be any statements “as shown easily...” if, this is not true. The reader should not need to rely on the author, but he should be able to convince himself, if what is said is true. I am trying to be as complete as possible in covering all material that is required. The basis is the mathematical knowledge. With few exceptions, the material is also developed in a sequence so that the material covered can be understood entirely from the knowledge covered earlier.

The derivations shall be **explicit**. The novice should be able to step through every single step of the derivation with reasonable effort. An advanced reader should be able to follow every step of the derivations even without paper and pencil.

All **units** are explicit. That is, formulas contain all fundamental variables, which can be inserted in any desirable unit system. Expressions are consistent with the SI system, even though I am quoting some final results in units, that are common in the field.

The equations that enter a specific step of a derivation are noted as **hyperlinks** ontop of the equation sign. The experience is that the novice does not immediately memorize all the material covered and that he is struggling with the math, so that he spends a lot of time finding the rationale behind a certain step. This time is saved by being explicit about it. The danger that the student gets dependent on these indications, is probably minor, as it requires some effort for the advanced reader to look up the assumptions, an effort he can save by memorizing the relevant material.

Important results and equations are highlighted by including them in **boxes**. This should facilitate the preparations for examinations.

**Portraits** of the key researchers and short biographical notes provide independent associations to the material. A student may not memorize a certain formula directly, but a portrait. From the portrait, he may associate the correct formula. The historical context provides furthermore an independent structure to organize the material.

The two first books are in german (That is the intended native language) in order to not add complications to the novice. After these first books, all material is in English. It is mandatory that the student masters this language. Most of the scientific literature is available only in English. English is currently the language of science, and science is absolutely dependent on international contacts.

I tried to include many graphs and figures. The student shall become used to use all his senses in particular the **visual sense**.

I have slightly modified the selection of the material commonly taught in most courses. Some topics, which I consider of mostly historical relevance I have removed. Others such as the Noether theorem, I have added. Some, like chaos, stochastic processes, etc. I have not added yet.





# Bibliography

- [1] John D. Jackson. Klassische Elektrodynamik.
- [2] Nolting. Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik. Springer Verlag.
- [3] Torsten Fliessbach. Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik 2. Spektrum Akademischer Verlag,.
- [4] Wolfgang Walter. Einführung in die Theorie der Distributionen. B.I. Wissenschaftsverlag, 1994.
- [5] G. Arfken. Mathematical Methods for Physicists. Academic Press, 1985.
- [6] P. M. Morse and H. Feshbach. Methods of Theoretical Physics, Part I. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [7] S.A. teukolsky W.H. Press, B.P. Fleming and W.T. Vetterling. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 1986.
- [8] P.E. Blöchl and J.H. Stathis. Hydrogen electrochemistry and stress-induced leakage current in silica. Phys. Rev. Lett, 83:372, 1999.
- [9] P.E. Blöchl. First-principles calculations of defects in oxygen-deficient silica exposed to hydrogen. Phys. Rev. B, 62:6158, 2000.
- [10] C.G. Van de Walle and P.E. Blöchl. First-principles calculations of hyperfine parameters. Phys. Rev. B, 47:4244, 1993.
- [11] Eds Ian Mills et al. Quantities, Units and Physical Constantd in Physical Chemistry. Blackwell Scientific Publications, 1993. ISBN ISBN 0-632-03583-8.
- [12] P.W. Atkins. Molecular Quantum mechanics. Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [13] M. Schabes. icromagnetic theory of non-uniform magnetization processes in magnetic recording particles. Magnetism and Magnetic Materials, 95:249, 1991.
- [14] W.F. Brown. Micromagnetics. Interscience Publishers, New York-London, 1963.
- [15] E.L. Hill. Hamilton's principle and the conversion theorems of mathematical physics. Rev. Mod. Phys., 23:253, 1957.
- [16] A. Wachter und H. Hoerber. Repetitorium Theoretische Physik. Springer Verlag, 1998.
- [17] Bjørn Felsager. Geometry, Particles and Fields. Odense University Press, 1981. ISBN ISBN 87-7492-358-7.
- [18] Peter E. Blöchl. ΦSX: Theoretische Physik I, Klassische Mechanik. Blöchl, 2015. URL <https://phisx.org/>.
- [19] Peter E. Blöchl. ΦSX: Theoretical Physics III, Quantum Theory. Blöchl, 2015. URL <https://phisx.org/>.

# Index

- adiabatische Verschiebung, 45
- Ampere, 15
- Ampereschs Gesetz, 25, 34
- axialer Vektor, 18
  
- bac-cab, 231
- Back-Zap, 231
- Bohr Magneton, 87
  
- Chaos, 163
- Coulomb, 15
- Coulombeichung, 132
- Coulombgesetz, 40
  
- Diamagnet, 108
- Dielektrizitätskonstante, 26
  - relative, 109
- Distribution, 16
  
- Eichfunktion, 132
- Eichinvariante Ableitung, 204
- Eichpotentiale
  - als Vierervektor, 141
- Eichsymmetrie, 131
- Eichtransformation, 132
  - lokale, 204
- Eigenzeit, 147
- Einsteinsche Summenkonvention, 139
- Elektrisches Feld, 25
- elektrisches Feld, 40
- Elektronenparamagnetischeresonance, 95
- Elektronenspinresonanz, 95
- Elementarladung, 15
- Energie
  - Teilchen, 168
- Energie-Impuls Tensor, 169
- EPR, 95
- Ereignis, 141
- Erregung
  - elektrische, 26
  - magnetische, 26
- ESR, 95
- Euler-Lagrange Gleichung
  - Teilchen und Felder, 155
  
- Faradaysches Induktionsgesetz, 33
  
- Faradayssches Gesetz, 25
- Farbkraft, 11
- Feinstrukturkonstante, 87
- Feldstärketensor, 157, 206
- Ferromagnet, 108
- Flächenladungsdichte, 53
- Fluss
  - magnetischer, 34
- Funktionalableitung, 153
  
- g-Faktor, 86
  - effektiver, 95
  - Elektron, 87
- Gaußsches Gesetz, 25, 31
- Gravitation, 11
- gyromagnetisches Verhältnis, 86
  
- Hamiltonfunktion
  - nichtrelativistisch, 175
  - relativistisches Teilchen im E-M Feld, 174
- Hauptsatz der Vektoranalysis, 241
- Helmholtz Theorem, 241
- Hyperfeinaufspaltung, 97
- Hyperfeintensor, 97
- Hyperfeinwechselwirkung, 96
- Hysterese, 111
  
- Impuls
  - kanonischer, Teilchen, 167
- Induktionsgesetz
  - Faradaysches, 33
- Induktionskonstante, 26
  - relative, 109
  
- kanonischer Impuls, 216
- Kernspinresonanz, 96
- Kirchhoffsche Knotenregel, 22
- Klein-Gordon Gleichung, 199
- Knotenregel, Kirchhoffsche, 22
- kontravarianter Vektor, 136
- Koordinatensystem
  - schiefwinkliges, 135
- Korrespondenzprinzip, 199
- kovarianter Vektor, 136
- KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN, 66

- LADUNGSDICHTE, 16  
 Ladungsdichte  
   magnetische, 93  
 Ladungserhaltungssatz  
   differentieller, 22  
 Lagrange-Dichte  
   der Elektrodynamik, 151  
 Lagrange-Funktion  
   der Elektrodynamik, 151  
 LAPLACEGLEICHUNG, 50  
 Leiter  
   idealer, 54  
 Lichtgeschwindigkeit, 36  
 Lorentz Transformation, 143  
 Lorentz-Skalar, 147  
 Lorentzzeichnung, 133  
 Lorentzkraft, 26, 209  
 Lorentzvektor, 147  
  
 Magnetfeld, 25  
 magnetische Ladungsdichte, 93  
 magnetischer Fluss, 34  
 magnetisches Moment, 83  
   potentielle Energie, 91  
 magnetisches skalares Potential, 93  
 Magnetisierung, 88  
   remanente, 108  
 Maxwellgleichungen, 25  
 Maxwellscher Spannungstensor, 180  
 Maxwellscher Verschiebungsstrom, 25  
 metrischer Tensor  
   allgemeine Definition, 137  
 MINIMALE KOPPLUNG, 215  
 Minimale Kopplung, 174  
 Minkowskiraum, 142  
 Moment  
   magnetisches, 83  
 Monopole  
   magnetische, 25  
  
 NMR, 96  
 Noethertheorem, 163  
  
 Paramagnet, 108  
 Pfadintegral, 152  
 Plattenkondensator, 53  
 POISSONGLEICHUNG, 43  
 polarer Vektor, 18  
 Polarisierung, 101  
   remanente, 108  
 Polarisierung  
   linear, 123  
 Potential  
   magnetisches, skalares, 93  
  
 Poynting, 179  
 Pseudoskalar, 18  
 Pseudovektor, 18, 35  
  
 Quarks, 11  
 quasistationärer Prozess, 45  
 Quasiteilchen, 163  
 Quellendichte, 170  
  
 Randbedingungen  
   Dirichlettsche, 51  
   Neumannsche, 51  
 remanent, 102  
 remanente Magnetisierung, 108  
 remanente Polarisierung, 108  
  
 schwache Kraft, 11  
 Selbstenergie  
   einer Ladungsdichte, 49  
   von Punktladungen, 48  
 Skalar, 18  
 Spannung, 33  
 Spannungstensor  
   Maxwellscher, 180  
 starke Kraft, 11  
 STOKES  
   SATZ VON, 239  
 Stokes  
   Satz von, 33  
 STROM, 19  
 Strom, 17  
 STROMDICHTE, 19  
 Summenkonvention  
   Einsteinsche, 139  
 Suszeptibilität  
   elektrische, 108  
   magnetische, 108  
  
 Vektor, 18  
 Verschiebung  
   adiabatische, 45  
 Verschiebungsstrom  
   Maxwellscher, 36  
 VIERERGESCHWINDIGKEIT, 148  
 Vierergradient, 141  
 Viererimpuls  
   kanonischer, 167  
 VIERERSTROMDICHTE, 141  
  
 Wechselwirkung  
   elektrische, 11  
   magnetische, 11  
 Weissche Bezirke, 111  
 WIRKUNG  
   DER ELEKTRODYNAMIK, 148

Wirkung

Feldanteil, 149

Pfadanteil, 149

Wirkungsprinzip, 147

Zeeman Effekt

anomaler, 92

normaler, 92

Zeeman effekt, 95

Zustandsgleichungen

elektrodynamische, 26

Zyklotronfrequenz, 28

Zyklotronradius, 28